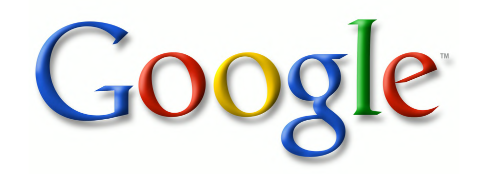
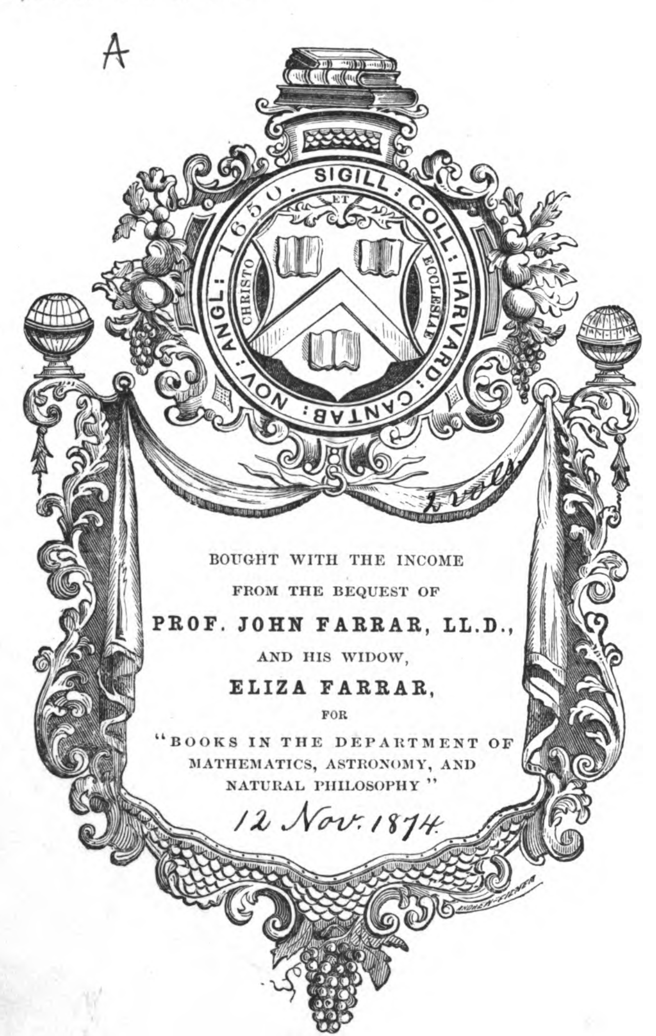

Google


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
2 vols
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
12 Nov. 1874.

Die

Elemente der Mathematik.

Von

Dr. Richard Baltzer

Professor an der Universität Gießen, Mitglied der k. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.

Erster Band.

Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra.

Vierte verbesserte Auflage.

Leipzig

Verlag von S. Hirzel.

1872.

Vorrede.

Das erste Buch dieser Elemente enthält einen kurzen Abriß des Rechenunterrichts zur Vorbereitung auf die allgemeine Arithmetik. Die Regel de tri, welche heute nicht mehr auf die Lehre von den Proportionen, sondern auf die Berechnung von Einheiten und Mehrheiten gegründet wird, konnte deshalb zum Vortheil der Lernenden weit in den Vordergrund gerückt werden. Einige Aenderungen im Vortrag der Lehre von den gemeinen Brüchen und den Decimalbrüchen empfehlen sich durch die Erleichterung, welche sie dem Unterricht gewähren. Der Abschnitt über die Genauigkeit von Zahlangaben und Rechnungsresultaten bildet eine Ergänzung, deren die Rechenbücher nicht mehr entbehren dürfen. Die aufgenommenen Beispiele mit vollständiger Ausführung sollen als Paradigmen dienen; die überall gezeigten Proben der Rechnung machen einen größern Vorrath von Rechnungsaufgaben überflüssig.

Das zweite Buch besteht aus 4 Abschnitten, von denen der erste die 4 Species der Buchstabenrechnung zum Gegenstande hat; der zweite enthält die Quadratwurzeln mit den irrationalen und complexen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen nebst den geometrischen Progressionen; der dritte das gemeine Binomialtheorem, die Combinatorik und deren wichtigste Anwendungen; der vierte die Kettenbrüche, die Exponentialreihe, die Binomialreihe und Logarithmenreihe.

Das dritte Buch beginnt mit einer Einleitung, welche die Proportionen, Grundbegriffe von den Functionen und die analytische Methode umfaßt. Der nächste Abschnitt behandelt die Lehre von den Gleichungen, die Bestimmung mehrerer Unbekannten durch ein System von Gleichungen, und insbesondere die quadratischen Gleichungen und Functionen. Darauf folgt die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen, der numerischen transscendenten und höhern algebraischen Gleichungen, der einfacheren Diophantischen Aufgaben. Den Schluß machen die elementarsten Sätze der algebraischen Analysis d. i. der Lehre von den algebraischen Functionen.

Die einzelnen Materien sind zumeist nach wissenschaftlichen Absichten gruppirt, dabei jedoch so unabhängig von einander bearbeitet, daß die Lehrer, welche das vorliegende Buch beim Unterricht gebrauchen

wollen, wünschenswerthe Freiheit in der Auswahl und Anordnung der Lehrstoffe behalten. Bei dem ersten Unterricht, dessen Material die Eingänge der einzelnen Paragraphen enthalten, ist von den weiteren Ausführungen derselben gar Manches zu streichen und erst gelegentlich nachzuholen. Die Algebra soll nicht etwa erst nach vollbrachtem Studium der hier gegebenen allgemeinen Arithmetik begonnen werden, es sind vielmehr ihre einzelnen Abschnitte zwischen die Abschnitte der allgemeinen Arithmetik einzuschalten. Man wird namentlich nach den vier Species der Buchstabenrechnung die Einleitung in die Algebra und die Gleichungen ersten Grades durchnehmen, dann die Quadratwurzeln mit den quadratischen Gleichungen und den Systemen von Gleichungen, dann die Potenzen, Wurzeln, Logarithmen und geometrischen Progressionen mit den transscendenten Gleichungen, dann die Combinatorik u. s. w. Die Anordnung des Lehrbuchs soll den wissenschaftlichen Zusammenhang der im Lehrvortrag gesonderten Gegenstände auch äußerlich zur Anschauung bringen. Der analytische Gang des mündlichen Vortrags wird durch die synthetische Fassung des Lehrbuchs am wenigsten eingeschränkt.

Die vierte Auflage unterscheidet sich von der dritten zunächst durch eine Anzahl Verbesserungen des Ausdrucks und Zusätze (II. §. 11, 8. §. 12, 6. §. 16, 7. §. 18, 6. §. 22, 3. §. 23, 2. §. 24, 5. §. 25, 4. III. §. 1, 6. §§. 4—7). Neu ausgearbeitet wurde in größerem Umfange die Elementarlehre von den Determinanten (II. §. 26.), beträchtlich erleichtert durch die Begriffe der adjungirten Subdeterminanten und der componirten Systeme. Auch die Abschnitte über die Exponentialreihe, die Binomialreihe und die Logarithmenreihe (II. §. 31— 32) und über die Functionen (III. §. 2) sind großentheils umgearbeitet und einfacher dargestellt worden. Besondere Mühe wurde dem letzten Abschnitt über die algebraischen Functionen (III. §. 10) zugewandt, welcher dadurch wesentlich entlastet werden konnte, daß er den Gauß'schen Fundamentalsatz über die Existenz der Wurzeln einer algebraischen Gleichung nicht zum Eingang sondern zum Ziel erhalten hat. Dabei ist die Entwickelung einer ganzen Function von einem ihrer Werthe aus, die Darstellung einer gebrochenen Function durch Partialbrüche, und eine einfache Ableitung von Cauchy's Satz hinzugefügt worden.

Inhalt.

Erstes Buch.

Gemeine Arithmetik.

Zweites Buch.

Allgemeine Arithmetik.

Drittes Buch.

Algebra.

Erstes Buch.

Gemeine Arithmetik.

---

§. 1. Addition und Subtraction.

1. Zu einer Zahl eine andere addiren heißt die Einheiten der zweiten Zahl zu der ersten hinzuzählen. Man bezeichnet 7 + 5 = 12 und liest „7 plus 5 gleich 12". Die Zahl 12 heißt die Summe der Zahlen 7 und 5, welche die Glieder (Posten) der Summe genannt werden.

Die Ordnung der Glieder ist beliebig, z. B. 5 + 7 = 7 + 5, 9 + 4 + 6 = 4 + 6 + 9, u. s. w.

2. Von einer Zahl eine andere subtrahiren heißt die Einheiten der zweiten Zahl von der ersten abzählen. Man bezeichnet 12 — 7 = 5 und liest „12 minus 7 gleich 5, oder 7 von 12 bleibt 5". Die Zahl 5 heißt die Differenz (Unterschied) der Zahlen 12 und 7, von denen jene der Minuendus, diese der Subtrahendus genannt wird.

Die Differenz zweier Zahlen ist die Zahl, welche mit der zweiten eine Summe giebt, die der ersten gleichkommt; z. B. 12 — 7 = 5, weil 5 + 7 oder 7 + 5 = 12. Also:

Differenz + Subtrahendus = Minuendus.

Die Differenz giebt an, um wieviel der Minuendus mehr ist als der Subtrahendus, und um wieviel der Subtrahendus weniger ist als der Minuendus, z. B. 12 ist mehr als 7, und 7 ist weniger als 12, und zwar um 12 — 7 d. i. 5.

3. Man kann nur Gleichartiges addiren und subtrahiren, z. B. Einer und Einer, Zehner und Zehner, Pfennige und Pfennige, Thaler und Thaler, Pfund und Pfund, u. s. w. Summe und Differenz sind mit den Gliedern gleichbenannt.

Praktische Bemerkungen. Man spricht und schreibt größere Zahlen in Abtheilungen von drei Stellen (Einer, Tausende, Millionen, . .) z. B.

983 017 besser als 983017
98 704 327 besser als 98704327

und setzt bei der Addition und Subtraction derselben genau Einer unter Einer u. s. w.

Bei der Addition vieler Glieder begleitet man die Bewegung des Auges mit der Feder, spricht nur die Summen aus und zwar im tactmäßigen Fortschritt, also bei den Einern des folgenden Beispiels nicht 6 + 7 = 13, 13 + 3 = 16, 16 + 8 = 24, 24 + 4 = 28, sondern sofort 6, 13, 16, 24, 28, während man mit Auge und Feder die Reihe durchläuft. Die gefundenen 2 Zehner bilden den Anfang der nächsten Summe und werden zu größerer Sicherheit über die Reihe der Zehner bemerkt.

Zur Einübung addirt man die Glieder einzeln oder gruppenweise und subtrahirt von der Summe wieder die einzelnen Glieder.

2 33 22			
76 856	76 856	749 574	1445 088
+ 9 237	+ 9 237	+ 76 856	— 76 856
+568 683	86 093	+ 9 237	1368 232
+ 40 738	+568 683	835 667	9 237
+749 574	654 776	568 683	1358 995
1445 088	+ 40 738	+ 40 738	—568 683
	695 514	609 421	790 312
	+749 574	+835 667	— 40 738
	1445 088	1445 088	749 574
			—749 574
			0

Man ist Störungen beim Rechnen weniger ausgesetzt, wenn man die gedachten Zahlen (auch leise) zu sprechen sich entwöhnt.

Beim Kopfrechnen ist es vortheilhaft, mit den **höchsten** Stellen anzufangen; z. B. 37 + 24 = 57 + 4 = 61, 74 — 38 = 44 — 8 = 36. Statt 96 zu addiren, addirt man 100 und subtrahirt von der Summe 4. Statt 95 zu subtrahiren, subtrahirt man 100 und addirt zur Differenz 5, u. s. w.

§. 2. Multiplication.

1. Eine Zahl mit einer andern **multipliciren** heißt die erstere sovielmal als Glied einer Summe setzen, als die zweite angiebt. Man bezeichnet die Summe 7 + 7 + 7 mit 7 . 3 oder 7 × 3 und liest „7 multiplicirt mit 3", oder auch „7 mal 3" (eigentlich 3mal 7). Die Zahl 21 heißt das **Product** der Zahlen 7 und 3, von denen jene der **Multiplicandus**, diese der **Multiplicator** genannt wird.

2. Multiplicandus und Multiplicator können ohne Veränderung des Products vertauscht werden und heißen **Factoren** des Products. Es ist

$$
\begin{aligned}
7 . 3 = \; & 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 3 . 7 \\
& + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
& + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

weil 3 Reihen von je 7 Einheiten, von der Seite betrachtet, 7 Reihen von je 3 Einheiten bilden. Eben so findet man $6 \times 7 \times 3 = 6 \times 3 \times 7$, indem man 6 statt 1 setzt.

Die Ordnung der Factoren ist beliebig. Daher $5 \times 25 \times 125 \times 2 \times 4 \times 8 = 5 \times 2 \times 25 \times 4 \times 125 \times 8 = 10 \times 100 \times 1000 = 1000\,000$, $25 \times 36 = 25 \times 4 \times 9 = 100 \times 9 = 900$ u. s. f. Statt mit 42 zu multipliciren, kann man mit 7 multipliciren und das Product mit 6, u. s. f.

3. Der Multiplicator kann nur eine unbenannte Zahl sein, weil er die gleichen Glieder zählt, deren Summe das Product ist; z. B. 7 Thlr. $\times 5 = 7 \times 5$ d. i. 35 Thlr. Das Product ist mit dem Multiplicandus gleichbenannt.

Praktische Bemerkungen. Bei mehrstelligen Zahlen beginnt man entweder mit der letzten Stelle des Multiplicators, oder besser*) mit seiner höchsten zu multipliciren, nachdem man dieselbe fest in den Sinn genommen.

```
   7536 . 26847         7536 . 26847
  52752                15072
 30144                  45216
60288                    60288
45216                     30144
15072                      52752
202318992              202318992
```

Man nimmt nach einander 6×7 Einer, 3×7 Zehner, 5×7 Hunderte, 7×7 Tausende u. s. f., oder 6×2 Zehntausende, 3×2 Hunderttausende, 5×2 Millionen u. s. f., ohne Umstellungen in Gedanken zuzulassen.

Zur Einübung ist die Probe wesentlich:

```
26847 × 7536
187929
 134235
   80541
   161082
202318992
```

Das Product einer 5stelligen Zahl mit einer 4stelligen Zahl hat 5 + 4 d. i. 9 oder 8 Stellen, weil $10\,000 \times 1000 = 10\,000\,000$, und $99\,999 \times 9999$ weniger als $100\,000 \times 10\,000$ d. i. $1000\,000\,000$ u. s. f.

Bei drei Factoren kann man zur Uebung den ersten mit dem zweiten multipliciren, das Product mit dem dritten; dann den ersten mit

---

*) Um der in §. 18 gezeigten Abkürzungen willen.

dem dritten, und das Product mit dem zweiten; dann den zweiten mit dem dritten, und das Product mit dem ersten. Jedesmal muß dieselbe Zahl gefunden werden.

Statt die Summe oder Differenz zweier Zahlen zu multipliciren, kann man die Glieder einzeln multipliciren und die Producte addiren oder subtrahiren, u. s. f.

Beim Kopfrechnen fängt man mit der höchsten Stelle des Multiplicandus an; z. B. $365 \times 7 = 2100, + 420$ d. i. $2520, + 35$ d. i. 2555. Man findet

$48 \times 17 = 50 \times 17$ d. i. $850 - 2 \times 17 = 816$
$48 \times 5 = 24 \times 10 = 240$
$48 \times 25 = 12 \times 100 = 1200$
$48 \times 15 = 240 \times 3 = 720$
$48 \times 75 = 1200 \times 3 = 3600$, u. s. w.

§. 3. Division.

1. Eine Zahl durch eine andere dividiren heißt die Zahl angeben, welche mit der zweiten ein Product giebt, das der ersten gleichkommt. Man bezeichnet 35 : 7 und liest „35 durch 7 dividirt, oder 7 in 35". Dieß giebt 5, weil 5×7 oder $7 \times 5 = 35$. Die Zahl 5 heißt der Quotient der Zahlen 35 und 7, von denen jene der Dividendus, diese der Divisor genannt wird.

Der Quotient ist also die Zahl, welche mit dem Divisor multiplicirt, oder mit welcher der Divisor multiplicirt den Dividendus giebt. Also:

Quotient $\times$ Divisor = Dividendus.

2. Entweder ist der Divisor unbenannt, und der Quotient der sovielte Theil des Dividendus als der Divisor angiebt,

oder der Divisor ist mit dem Dividendus gleichbenannt, und der Quotient das Verhältniß des Dividendus zum Divisor, d. h. er giebt an, wievielmal der Divisor im Dividendus enthalten, wievielmal so groß der Dividendus ist als der Divisor.

Z. B. 35 : 7 = 5 d. h. 5 ist der 7te Theil von 35, 7 in 35 ist 5mal enthalten, 35 ist 5mal so groß als 7.

35 Thlr. : 7 Thlr. = 5 d. h. das Verhältniß von 35 Thalern zu 7 Thalern ist 5, 7 Thaler sind in 35 Thalern 5mal enthalten, 35 Thaler ist 5mal soviel als 7 Thaler.

Das Verhältniß von 36 Thalern zu 9 Thalern, von 36 Pfund zu 9 Pfund, von 36 Fuß zu 9 Fuß u. s. w. ist das Verhältniß von 36 zu 9 d. i. 4. Denn da $9 \times 4 = 36$, so sind 9 Thlr. $\times 4 = 36$ Thlr., 9 Pfd. $\times 4 = 36$ Pfd., $9' \times 4 = 36'$ u. s. w.

3. Wenn der Dividendus nicht ein Vielfaches vom Divisor ist, so geht die Division nicht auf, und es bleibt ein Rest; der Quotient fällt zwischen zwei auf einander folgende natürliche Zahlen und kann nur mit Hülfe eines Bruches angegeben werden.

56 : 7 = 8, weil 56 = 7 × 8, ein Vielfaches von 7.
91 : 7 = 13, weil 91 = 7 × 13, " " "

23 : 7 ist mehr als 3 und weniger als 4, weil 7 × 3 = 21 und 7 × 4 = 28. Die Differenz 2 zwischen 23 und 21, welche ein Rest heißt, soll auch durch 7 dividirt werden. Nun ist 1 : 7 der 7te Theil von 1, welcher $\frac{1}{7}$ bezeichnet und 1 Siebentel gelesen wird. Ferner ist 2 : 7 der 7te Theil von 2, mithin 2mal so groß als der 7te Theil von 1, also = $\frac{2}{7}$ (2 Siebentel). Daher ist 23 : 7 = $3\frac{2}{7}$, d. h. der 7te Theil von 23 ist $3\frac{2}{7}$, das Verhältniß von 23 zu 7 ist $3\frac{2}{7}$. Die künstlichen Ausdrücke

23 ist $3\frac{2}{7}$mal so groß als 7, 7 ist $3\frac{2}{7}$mal in 23 enthalten,
23 ist das $3\frac{2}{7}$fache von 7, 7 ist der $3\frac{2}{7}$te Theil von 23,

werden beim Rechnen mit Vortheil angewendet.

Die Zahlen $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, . . heißen Brüche, die obere Zahl der Zähler (er zählt die Theile), die untere der Nenner des Bruches (er benennt die Theile). Mit Vorbehalt der Rechnung kann man 5317 : 683 = $\frac{5317}{683}$ setzen, und die Bezeichnungen 5317 : 683 und $\frac{5317}{683}$ als gleichbedeutend gebrauchen.

4. Ist ein Bruch neben der ganzen Zahl des Quotienten unbeträchtlich oder unzulässig (bei Individuen), so achtet man ihn für 1 oder für 0, je nachdem der Zähler die Hälfte des Nenners und der Bruch den Werth $\frac{1}{2}$ übersteigt oder nicht. 39 : 11 ist genauer 4 als 3, weil 39 näher an 44 als an 33 liegt, und der Rest 6 mehr als die Hälfte von 11 beträgt. Dagegen ist 43 : 8 genauer 5 als 6.

Z. B. um den Durchschnitt (das arithmetische Mittel, einen Näherungswerth) gegebener Werthe zu berechnen, dividirt man ihre Summe durch ihre Anzahl; der Quotient wird als Näherungswerth ohne Bruch angegeben, z. B.

4726
4754
4698
4719
18897 : 4
4724

Also ist 4724 der Durchschnittswerth der gegebenen Zahlen.

Praktische Bemerkungen. Zur Einübung ist die Probe wesentlich, daß man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, um den Dividendus wieder zu erhalten; z. B.

$253\,827 : 385 = 659\frac{112}{385}$	$659\frac{112}{385} \,.\, 385$
231 0	197 7
22 82	52 72
19 25	3 295
3 577	112
3 465	253 827
112	

Um die Hunderte des Quotienten zu finden, überlegt man, daß 385 in 2538 Hundert nahe sovielmal enthalten ist, als 3 Hundert in 25 Hundert, oder näher sovielmal, als 4 Hundert in 25 Hundert (weil 385 näher 400 als 300), oder als 4 in 25 u. s. f. Die Quotienten sind bei vermehrtem Divisor etwas zu vergrößern, z. B. 4 in 35 wurde 9mal genommen.

Bei der Probe giebt der 385te Theil von 112 385mal genommen das Ganze 112.

Endigt der Divisor mit Nullen, so kann man dieselben während der Rechnung mit eben soviel Stellen am Ende des Dividendus unbeachtet lassen; z. B.

$$327\,456 : 6400 = 3274{,}56 : 64{,}00 = 51\tfrac{1056}{6400}$$

```
320
 74
 64
 10
```

327 400 : 6400 = 3274 : 64, denn 64 Hundert sind in 3274 Hundert sovielmal enthalten, als 64 in 3274.

Statt durch 15 zu dividiren, kann man den 5ten Theil durch 3 dividiren. Statt durch 25 zu dividiren, kann man das 4fache durch 100 dividiren, u. s. w.

Um durch 4 zu dividiren, beachtet man, zwischen welchen der Zahlen 40, 80, 120, 160, 200, 240, 280, .. der Dividendus liegt, u. s. w.

§. 4. Rechnung mit mehrfach benannten Zahlen.

1. Zur Vermeidung der Brüche hat man die verschiedenen Maßeinheiten eingetheilt und bestimmten Theilen derselben besondere Namen gegeben. Die größeren Maßeinheiten dienen zur leichteren Auffassung großer Mengen kleinerer Einheiten.

Geldeinheiten:

Thaler (30) $\left\{\begin{matrix}\text{Silbergroschen (12)}\\ \text{Neugroschen (10)}\end{matrix}\right\}$ Pfennig. Gulden $\left\{\begin{matrix}\text{(60) Kreuzer}\\ \text{(100) Neukreuzer.}\end{matrix}\right.$

Mark = $\frac{1}{3}$ Thaler (100) Pfennig. 30 Thaler enthalten 1 Pfund Silber, 1395 Mark enthalten 1 Pfund Gold.

Franc (100) Centime. Franc = 20 Sous.

Livre Sterling (20) Shilling (12) Penny. Guinee = 21 Shill.

Zahleinheiten:

Gross (12) Dutzend (12) Stück.

Schock (4) Mandel (15) Stück.

Ballen (10) Ries (20) Buch $\left\{\begin{matrix}\text{24 Schreib-}\\ \text{25 Druck-}\end{matrix}\right\}$ Bogen.

Zeiteinheiten:

Tag (24^h) Stunde (60′) Minute (60″) Sekunde.

Jahr (12) Monat (30) Tag, bei geschäftlichen Rechnungen.

Längeneinheiten:

Ruthe $\left\{\begin{matrix}12'\\ 10'\end{matrix}\right\}$ Fuß $\left\{\begin{matrix}12''\\ 10''\end{matrix}\right\}$ Zoll $\left\{\begin{matrix}12'''\\ 10'''\end{matrix}\right\}$ Linie.

Die obere Eintheilung ist nach dem Duodecimalsystem, die untere nach dem Decimalsystem gemacht.

Kilometer (10) Hectometer (10) Decameter (10) Meter (10) Decimeter (10) Centimeter (10) Millimeter.

Meile (2000^0) Ruthe. Meile = 7500 Meter. Elle (24) Zoll.

Winkeleinheiten:

Gestreckter Winkel (2^r) Rechter Winkel (90^0) Grad (60′) Minute (60″) Sekunde.

Flächeneinheiten:

Gewöhnlich Quadrateinheiten, d. h. Quadrate, deren Seiten Längeneinheiten sind, z. B. Quadratfuß, ein Quadrat, dessen Seite ein Fuß ist.

Wenn 1 Fuß $\left\{\begin{matrix}12\\ 10\end{matrix}\right\}$ Zoll hat, so hat 1 Quadratfuß (□′) $\left\{\begin{matrix}12 \times 12\\ 10 \times 10\end{matrix}\right.$ d. i. $\left.\begin{matrix}144\\ 100\end{matrix}\right\}$ Quadratzoll (□″) u. s. w.

Feldmaße: Morgen (180 □ Ruthen), Are (100 □ Meter), Acker, Scheffel Aussaat u. dergl.

Raumeinheiten:

Gewöhnlich Cubikeinheiten, d. h. Würfel, deren Kanten Längeneinheiten und deren Seiten folglich Quadrateinheiten sind, z. B. Cubikfuß, ein Würfel (Cubus) dessen Kante ein Fuß ist.

Wenn 1 Fuß $\left\{\begin{matrix}12\\10\end{matrix}\right\}$ Zoll hat, so hat 1 Cubikfuß $\left\{\begin{matrix}12\times12\times12\\10\times10\times10\end{matrix}\right\}$ d. i. $\left.\begin{matrix}1728\\1000\end{matrix}\right\}$ Cubikzoll u. s. w.

Für Flüssigkeiten:

Fuder (4) Oxhoft (1½) Ohm (2) Eimer (2) Anker (30) Quart. Faß. Tonne. Kanne = Liter (Cubikdecimeter).

Für Getreide:

Wispel (2) Malter (12) Scheffel (4) Viertel (4) Metzen. Scheffel = 50 Liter.

Für feste Körper z. B. Holz: Klafter. Stère (Cubikmeter).

Gewichteinheiten:

Centner (110) Pfund (32) Loth (4) Quentchen. Centner (5) Stein.
Centner (100) Pfund (30) Loth (10) Quent (10) Cent.
Mark (16 Loth). Karat (⅜ Loth).
Unze (8) Drachme = Quentchen (60) Gran.
Kilogramm (10) Hectogramm (10) Decagramm (10) Gramm (10) Decigramm (10) Centigramm (10) Milligramm. Pfund (½ Kilogramm). Neuloth (Decagramm). Tonne (1000 Kilogramm).

2. Eine Preisangabe in Thalern, Groschen und Pfennigen, eine Längenangabe in Fuß, Zoll und Linien, eine Gewichtsangabe in Centnern, Pfund und Loth u. s. w. heißt eine mehrfach benannte Zahl. Man kann die höheren Einheiten durch Multiplication in niedere verwandeln (resolviren), und die niederen Einheiten durch Division in höhere (reduciren); z. B. Thaler werden in Silbergroschen verwandelt, indem man sie mit 30 multiplicirt, 25 Thlr. = 25 × 30 d. i. 750 Sgr. Pfennige werden in Silbergroschen verwandelt, indem man sie durch 12 dividirt, 319 Pf. = 319 : 12 d. i. $26\frac{7}{12}$ Sgr. = 26 Sgr. 7 Pf.

Schema: 547 Thlr. 19 Sgr. 5 Pf.
16 410
19
16 429 Sgr.
197 148
5
197 153 Pf.

197 153 Pf. : 12 = 16 429 Sgr. : 30 = 547 Thlr.
77 — 1 4
5 1 — 22
35 — 19 Sgr.
113
5 Pf.

3. Man rechnet mit mehrfach benannten Zahlen nach denselben Regeln, wie mit mehrstelligen Zahlen, welche aus Einern, Zehnern, Hunderten u. s. f. bestehen. Addition, Subtraction, Multiplication mehrfach benannter Zahlen beginnt man bei den niederen Einheiten, Division bei den höheren. Auch kann man anfangs resolviren, mit den niederen Einheiten die verlangte Rechnung vornehmen und die gefundene Zahl reduciren.

(1 22) 27	Thlr.	(22) 16	Sgr.	4	Pf.
+109	„	25	„	6	„
+653	„	14	„	10	„
+ 25	„	7	„	9	„
816	Thlr.	64		29	
		4	Sgr.	5	Pf.

816	Thlr.	4	Sgr.	5	Pf.
— 27	„	16	„	4	„ *)
788	„	18	„	1	„
—109	„	25	„	6	„
678	„	22	„	7	„
—653	„	14	„	10	„
25	„	7	„	9	„

6 Ctr.	78 Pfd.	25 Loth × 84
60	65	2100
504	312	192
564 Ctr.	624	180
	6617	160
	17 Pfd.	20 Loth.

Man nimmt zuerst 25 Loth × 84 = 65 Pfd. 20 Loth, dazu 78 Pfund × 84, d. i. 60 Ctr. 17 Pfd., dazu 6 Ctr. × 84, d. i. 564 Ctr.

Oder: 6 Ctr. 78 Pfd. 25 Loth.

```
  660
   78
  738 Pfd.
22 14
 1 476
    25
23 641 Loth × 84
1891 28
  94 564
1985 844 Loth : 32 = 62 057 Pfd. : 110 = 564 Ctr.
  65                 7 0
   1 84                45
    244                  17 Pfd.
     20 Loth.
```

*) Statt 16 Sgr. von 1 Thlr. 4 Sgr. oder 34 Sgr. abzuziehen, kann man 16 von 30 subtrahiren und zur Differenz 4 addiren, u. s. w.

28 Wspl.	17 Schffl.	$15\frac{29}{96}$ Mtzn.
2759 Wspl.	19 Schffl.	13 Mtzn. : 96
192	1704	546
839	4723	91
768	96	1469
71	763	96
	672	509
	91	480
		29

Man findet zuerst 2759 Wspl. : 96 = 28 Wspl., verwandelt den Rest in Schffl., addirt 19, dividirt die Summe durch 96 und findet 17 Schffl.; den Rest verwandelt man in Metzen, addirt 13, dividirt die Summe durch 96 und findet $15\frac{29}{96}$ Mtzn.

Oder: 2759 Wspl. 19 Schffl. 13 Mtzn.

5518
11036
19
66235 Schffl.
397410
13

1059773 Mtzn. : 96 =	11039 Mtz. : 16 =	689 Schffl. : 24 = 28 Wspl.
96	96	48
99	143	209
96	128	192
377	159	17 Schffl.
288	144	
893	15 Mtzn.	
864		
$\frac{29}{96}$ Mtzn.		

Als Uebung kann man die Probe hinzunehmen, daß der Quotient mit dem Divisor multiplicirt den Dividendus giebt.

28 Wspl.	17 Schffl.	$15\frac{29}{96}$ Mtzn. $\times$ 96
71	91	29
168	672	480
252	96	96
2759 Wspl.	1723	1469
	168	29
	43	13 Mtzn.
	24	
	19 Schffl.	

Um $\frac{5}{7}$ Thlr. aufzulösen, berechnet man den 7ten Theil von 5 Thlr. oder 150 Sgr. und erhält $21\frac{3}{7}$ Sgr. Eben so ist $\frac{3}{7}$ Sgr. der 7te Theil von 3 Sgr. oder 36 Pf. = $5\frac{1}{7}$ Pf. Also ist $\frac{5}{7}$ Thlr. = 21 Sgr. $5\frac{1}{7}$ Pf.

Um das Verhältniß 25 Ctr. 106 Pfd. : 3 Ctr. 78 Pfd. zu berechnen, verwandelt man beide Gewichte in Pfund. Nun sind 408 Pfd. in 2856 Pfd. sovielmal enthalten als 408 in 2856, nämlich 7mal. Also ist 7 das gesuchte Verhältniß, d. h. 3 Ctr. 78 Pfd. sind in 25 Ctr. 106 Pfd. 7mal enthalten.

Die einfache Zeitrechnung sucht entweder aus zwei Terminen (Epochen) die Zwischenzeit, oder aus einem Termin und der Zwischenzeit den andern Termin.

a. Wie lang ist die Zeit von 1818 den 29. Octbr. bis 1832 den 17. März? Vom 29. Octbr. 1818 bis 1819 sind 64 Tage, von 1819 bis 1832 sind 13 Jahre, und bis zum 17. März 76 Tage, also überhaupt 13 Jahre 140 Tage verflossen.

Wie lang ist die Zeit von 1815 den 12. Mai bis 1837 den 7. Sept.? Vom 12. Mai bis 7. Sept. 1815 sind 118 Tage und bis 7. Sept. 1837 noch 22 Jahre verflossen.

b. Welches Datum ist 13 Jahre 216 Tage nach dem 21. Juni 1820? 194 Tage nach dem 21. Juni ist der 1. Jan. 1821, die übrigen 22 Tage und 13 Jahre später ist der 23. Jan. 1834.

c. Welches Datum ist 56 Jahre 86 Tage vor dem 7. März 1844? 67 Tage vor dem 7. März 1844 ist der letzte Dec. 1843, die übrigen 19 Tage und 56 Jahre früher ist der 12. Dec. 1787.

Weniger genau löst man diese Aufgaben, wenn man das Jahr zu 12 Monaten und den Monat zu 30 Tagen annimmt.

§. 5. Proportionalität der Größen*).

1. Eine Größe heißt abhängig von einer andern Größe, wenn eine Aenderung der letztern eine Aenderung der erstern zur Folge hat. Z. B. die Länge eines Metallstabes ist abhängig von der Temperatur, weil eine Aenderung der Temperatur eine Verlängerung oder Verkürzung des Stabes nach sich zieht; der Preis einer Waare ist abhängig von ihrer Menge, Güte, Seltenheit, von der Nachfrage u. s. w.

2. Eine Größe heißt einer andern Größe proportional, wenn sie von ihr so abhängt, daß, während die zweite mehrmal so groß wird, die erste ebensovielmal so groß wird.

Der Preis einer Waare ist in vielen Fällen ihrem Gewicht proportional d. h.

5 Pfd. kosten 5mal soviel als 1 Pfd.
1 Pfd. kostet den 7ten Theil soviel als 7 Pfd.

---

*) Vergl. im 3. Buche §. 2.

Ausnahmen bilden die Preise von Edelsteinen, Glasscheiben, Nutzhölzern u. dgl.

Die Arbeit ist der Kraft proportional d. h.

8 Arbeiter leisten 8mal soviel als 1 Arbeiter,
1 Arbeiter leistet den 4ten Theil soviel als 4 Arbeiter.

Die Zinsen sind dem Capital proportional d. h.

19 Thlr. Capital geben 19mal soviel Zinsen als 1 Thlr. Cap.
1 Thlr. Cap. giebt den 100ten Theil soviel Zinsen als 100 Thlr. Cap.

3. Eine Größe heißt einer andern Größe umgekehrt (indirect) proportional, wenn sie von ihr so abhängt, daß, während die zweite mehrmal so groß wird, die erste den ebensovielten Theil so groß wird.

Bei einer Arbeit ist die Zeit der Kraft umgekehrt proportional d. h.

4 Arbeiter brauchen den 4ten Theil soviel*) Zeit als 1 Arb.
1 Arbeiter braucht 5mal soviel Zeit als 5 Arb.

Bei gegebener Fläche ist die Breite eines Rechtecks der Länge umgekehrt proportional, d. h. man braucht
bei 60 Fuß Länge den 60ten Theil soviel Breite, als bei 1 Fuß Länge,
bei 1 Fuß Länge 50mal soviel Breite, als bei 50 Fuß Länge.

Mit einem Vorrath reichen

9 Mann den 9ten Theil so lange als 1 Mann,
1 Mann 7mal so lange als 7 Mann.

Für einen gewissen Preis schafft man

3 Ctr. den 3ten Theil so weit als 1 Ctr.,
1 Ctr. 5mal so weit als 5 Ctr.

Eine gespannte Saite oder die Luft in einer Orgelpfeife schwingt in bestimmter Zeit

bei 3 Fuß Länge den 3ten Theil so oft als bei 1 Fuß Länge,
bei 1 Fuß Länge 2mal so oft als bei 2 Fuß Länge.

4. Eine Größe heißt dem Quadrat oder Cubus einer andern Größe proportional, wenn, während die zweite 2, 3, 4, .. mal so groß wird, die erste 2.2, 3.3, 4.4, . . mal so groß, oder 2.2.2, 3.3.3, 4.4.4, . . mal so groß wird.

Eine Größe heißt dem Quadrat einer andern Größe umgekehrt proportional, wenn, während die zweite 2, 3, 4, . . mal so groß wird, die erste den 2.2ten, 3.3ten, 4.4ten, . . Theil so groß wird.

Der Preis eines Diamanten ist dem Quadrat seines Gewichts proportional, d. h. der Diamant kostet

---

*) Man sagt besser: „den 4ten Theil soviel", als „4mal weniger".

3 Karat schwer 3.3mal soviel als 1 Karat schwer,
1 Karat schwer den 2.2ten Theil soviel als 2 Karat schwer.

Bei einem freigelassenen Körper ist die Falltiefe dem Quadrat der Fallzeit proportional, d. h. der Körper fällt

in 4 Sekunden 16mal so tief als in 1 Sek.,
in 1 Sekunde den 9ten Theil so tief als in 3 Sek.

Die Quadratfläche ist dem Quadrat der Seite, die Kreisfläche und die Kugelfläche dem Quadrat des Radius proportional.

Der Würfelinhalt ist dem Cubus der Kante, der Kugelinhalt dem Cubus des Radius proportional, d. h. der Würfel ist

bei 3 Fuß Kante 27mal so groß, als bei 1 Fuß Kante,
bei 1 Fuß Kante den 64ten Theil so groß, als bei 4 Fuß Kante.

Die Beleuchtung einer kleinen Fläche ist dem Quadrat des Lichtabstandes umgekehrt proportional, d. h. sie ist

4 Fuß vom Licht den 4.4ten Theil so groß, als 1 Fuß vom Licht,
1 Fuß vom Licht 9mal so groß, als 3 Fuß vom Licht.

Die Anzahl der Schwingungen, welche ein Pendel in gegebener Zeit macht, ist dem Quadrat der Pendellänge umgekehrt proportional. Das Gewicht eines Körpers ist dem Quadrat des Abstandes vom Erdcentrum umgekehrt proportional.

§. 6. Regel de tri.

Wenn einer Größe (A) eine andere Größe (B) proportional ist, und ein Paar zusammengehörige Werthe der Größen gegeben sind, so läßt sich für jeden Werth der einen (A) der dazu gehörige Werth der andern (B) berechnen. Die Anleitung zu dieser Berechnung heißt Regel de tri.

1. Aufgabe: Wenn man für 9 Thlr. 7 Pfd. einer Waare erhält, wieviel kosten 13 Pfd.?

Man bildet nach der Frage die vorläufige Antwort so, daß die gesuchte Größe den Schluß macht:

13 Pfd. kosten irgend wieviel Thaler.

Diesem Satze wird aus der Aufgabe der Obersatz nachgebildet:

7 Pfd. kosten 9 Thaler.

Durch den Einheitsschluß „1 Pfd. kostet den 7ten Theil soviel als 7 Pfd.“ (§. 5) erhält man den Mittelsatz:

1 Pfd. kostet 9 Thaler : 7

oder wie man auch bezeichnen kann (§. 3, 3)

1 Pfd. kostet $\frac{9 \text{ Thlr.}}{7}$ („9 Thlr. durch 7, oder $\frac{9}{7}$ Thlr.").

Der Mehrheitsschluß „13 Pfd. kosten 13mal soviel als 1 Pfd." (§. 5) fordert, den 7ten Theil von 9 Thlr. 13mal zu nehmen, d. i. den 7ten Theil von 9 × 13 Thlr. So erhält man den Schlußsatz:

13 Pfd. kosten $\frac{9 \text{ Thlr.} \times 13}{7}$ („9 Thlr. mal 13, durch 7").

Die nun vorzunehmende Ausrechnung 9 × 13 = 117 und 117 : 7 = $16\frac{5}{7}$ ergiebt die gesuchte Antwort:

13 Pfd. kosten $16\frac{5}{7}$ Thlr.

2. Ist in der vorläufigen Antwort die gegebene Größe eine mehrfach benannte Zahl oder anders benannt als die gleichartige Größe der Aufgabe, so bringe man vor Bildung der Sätze beide auf gleiche Benennung.

Wenn man für 9 Thlr. 17 Sgr. 7 Pfd. 12 Loth erhält, wieviel kosten 13 Pfd. 4 Loth? Statt 13 Pfd. 4 Loth hat man 420 Loth, und statt 7 Pfd. 12 Loth hat man 236 Loth zu nehmen. Dann verfährt man wie oben. Bei der Ausrechnung kann man auch 9 Thlr. 17 Sgr. in Sgr. verwandeln, was jedoch nicht nothwendig ist. (Vergl. §. 4.)

Wenn man für 9 Thlr. 17 Sgr. 7 Pfd. erhält, wieviel kosten 24 Loth? Statt 7 Pfd. führt man 224 Loth ein, u. s. w.

3. Aufgabe: Wie lange brauchen 28 Arbeiter zu einem Werke, welches 16 Arbeiter in 15 Wochen vollenden?

Auflösung: 16 Arbeiter brauchen 15 Wochen
1 „ braucht 15 W. × 16 (16mal so viel)
28 „ $\frac{15 \text{ W.} \times 16}{28}$ (den 28. Theil so viel)

Ausrechnung: 15 × 16
240 : 28 = 8 W. $3\frac{12}{28}$ Tage, die Arbeitswoche zu 6 Tagen gerechnet.
224
16 × 6
96
84
12

Antwort. 28 Arbeiter brauchen 8 Wochen $3\frac{12}{28}$ Tage.

4. In vielen Fällen giebt man an, wieviel Einheiten einer Größe zu 100 Einheiten einer andern Größe gehören, und nennt jene Anzahlen Procente (bezeichnet %).

Ein Capital trägt 4 Proc. Zinsen heißt: 100 Thlr. Capital tragen

in 1 Jahr (12 Monaten, 360 Tagen) 4 Thlr. Zinsen. Werden die Zinsen nicht ausgezahlt (aber auch nicht verzinst), so wächst das Capital, und zwar

aus 100 Thlr. werden in 1 Jahr 104 Thlr.
" " " " " 2 " 108 " u. s. f.

Ein Wald wächst jährlich um 1 Proc. h.: aus 100 Klaftern werden in 1 Jahr 101, in 2 Jahren 102 u. s. f.

Eine Rechnung wird mit 4 Proc. Rabatt bezahlt h.: für 100 Thlr. Rechnung werden 96 Thlr. baar bezahlt.

Eine Geldsumme wird mit 5 Proc. jährigem Disconto ausgezahlt h.: 100 Thlr. in 1 Jahre fällig werden sogleich mit 95 bezahlt. Beim Rabatt und Disconto von 4 auf Hundert werden 104 Thlr. mit 100 bezahlt.

Louisd'ors geben 11 Proc. Agio h.: 100 Thlr. in Louisd'ors (zu 5 Thlr. Gold) gelten 111 Thlr. Courant.

Eine Sorte Papiergeld steht 87 Proc. h.: 100 Thlr. in diesem Papier gelten 87 Thlr. Courant.

An einer Waare werden 7 Proc. gewonnen h.: für 100 Thlr. Einkaufsgeld nimmt der Verkäufer 107 Thlr. ein. Werden dagegen 3 Proc. verloren, so nimmt er für 100 Thlr. Einkaufsgeld 97 Thlr. ein.

Bei einem Ballen oder Faß Waare sind 3 Proc. Tara h.: 100 Pfd. desselben (Brutto) enthalten 97 Pfd. Waare (Netto).

Atmosphärische Luft enthält dem Raum nach 21 Proc. Sauerstoff und 79 Proc. Stickstoff h.: 100 Raumeinheiten derselben bestehen aus 21 Raumeinheiten Sauerstoff und 79 Raumeinheiten Stickstoff.

Alkohol von 80 Proc. h. eine Mischung, von der 100 Raumeinheiten 80 Raumeinheiten Alkohol enthalten.

Um das Verhältniß von zwei Größen anzugeben, sagt man bisweilen, die erste ist z. B. um 36 Proc. größer (oder kleiner) als die zweite, d. h. die erste enthält sovielmal 136 (oder 64) Einheiten, als die zweite 100 Einheiten hat.

Diese Erklärungen dienen zur Bildung der Obersätze bei den hierher gehörigen Aufgaben, deren Lösung keine eigenthümliche Schwierigkeit hat.

§. 7. Theilbarkeit der Zahlen.*)

1. Die natürlichen Zahlen sind theils einfach (Primzahlen), theils Vielfache kleinerer Zahlen (zusammengesetzt). Eine Zahl ist durch eine andere nur dann (ohne Bruch) theilbar, wenn sie aus ihr zusammengesetzt, von ihr ein Vielfaches ist. Die Vielfachen von 2

*) Vergl. im 2ten Buche §. 13.

heißen gerade, die übrigen ungerade Zahlen. Die Primzahlen sind, mit Ausnahme der 2, sämmtlich ungerade.

Um eine Tabelle der Primzahlen zu bilden*), schreibt man die ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, . . auf, streicht 3×3 d. i. 9 und jede darauf folgende 3te Zahl (die Vielfachen der 3), dann 5×5 d. i. 25 und jede 5te Zahl (die Vielfachen der 5), dann 7×7 d. i. 49 und jede 7te Zahl u. s. f. (die bereits gestrichenen Zahlen mitgezählt). Die ungestrichen übriggebliebenen Zahlen sind die Primzahlen.

	3	5	7	(9)	11	13	(15)	17	19
(21)	23	(25)	(27)	29	31	(33)	(35)	37	(39)
41	43	(45)	47	(49)	(51)	53	(55)	(57)	59
61	(63)	(65)	67	(69)	71	73	(75)	(77)	79
(81)	83	(85)	(87)	89	(91)	(93)	(95)	97	(99)
101	103	(105)	107	109	(111)	113	(115)	(117)	(119)
(121)	(123)	(125)	127	(129)	131	(133)	(135)	137	139
(141)	(143)	(145)	(147)	149 u. s. w.					

Um vortheilhaft rechnen zu können, hat man die Beschaffenheit der kleinern Zahlen, z. B. bis 150, sich einzuprägen. Die Primzahlen darunter sind außer 2, 3, 5, 7 folgende:

11	13	17	19	.	83	.	89
.	23	.	29	.	.	97	.
31	.	37	.	101	103	107	109
41	43	47	.	.	113	.	.
.	53	.	59	.	.	127	.
61	.	67	.	131	.	137	139
71	73	.	70	.	.	.	149

Unter den zusammengesetzten Zahlen sind zu merken:

51	3×17	98	2×49	121	11×11
52	4×13	102	6×17	123	3×41
57	3×19	104	8×13	129	3×43
68	4×17	111	3×37	133	7×19
76	4×19	112	7×16	136	8×17
78	6×13	114	6×19	138	6×23
87	3×29	116	4×29	141	3×47
91	7×1	117	9×13	143	11×13
92	4×23	119	7×17	147	3×49

2. Eine zusammengesetzte Zahl kann als Product von lauter Primzahlen dargestellt werden. Aus dieser Darstellung der Zahl erkennt man ihre Divisoren (im engern Sinne) d. h. die Zahlen, durch welche sie theilbar ist, welche in ihr aufgehen.

*) Sieb des Eratosthenes nach der Mittheilung von Nikomachus Arithm. I, 17.

$$105 = 21 \times 5 = 3 \times 5 \times 7.$$
$$72 = 8 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3.$$

Demnach ist 105 nur theilbar durch die Primzahlen 3, 5, 7, und durch die zusammengesetzten Zahlen 3×5, d. i. 15, 3×7 d. i. 21, 5×7 d. i. 35.

72 hat die Divisoren 2, 2×2 d. i. 4, $2 \times 2 \times 2$ d. i. 8, 3, 3×3 d. i. 9, 2×3 d. i. 6, 2×9 d. i. 18, 4×3 d. i. 12, 4×9 d. i. 36, 8×3 d. i. 24.

Auch erkennt man aus der Zusammensetzung:

3	in 105 ist	5×7 d. i.	35mal	enthalten
5	"	3×7 "	21 "	"
7	"	3×5 "	15 "	"
15 d. i. 3×5	"	7	"	"
21 " 3×7	"	5	"	"
35 " 5×7	"	3	"	"

Ist eine Zahl einzeln durch 2 und 3 theilbar, so ist sie auch durch 2×3 d. i. 6 theilbar. Ist eine Zahl durch 6 und 7 theilbar, so ist sie es auch durch 6×7 d. i. 42.

Ist dagegen eine Zahl durch 4 und 6 theilbar, welche den Divisor 2 gemein haben, so kann man nicht behaupten, daß sie durch 4×6 d. i. 24 theilbar sei. Z. B. 84 ist durch 4 und durch 6 theilbar, aber nicht durch 4×6, sondern nur durch 4×3.

Um die Beschaffenheit einer Zahl zu untersuchen, dividirt man sie durch 2, 3, 5, 7 und die folgenden Primzahlen bis zu derjenigen, welche mit sich selbst multiplicirt mehr ist, als die gegebene Zahl. Z. B. 193 ist nicht durch 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 theilbar. $17 \times 47 = 289$ übersteigt bereits 193; diese Zahl kann nicht Divisoren haben, die beide größer als 17 wären, und ist folglich eine Primzahl. Dagegen

$$\begin{array}{rclcrcl}
4680 : 2 &=& 2340 & \quad & 4680 &=& 2 \times 2340 \\
2340 : 2 &=& 1170 & & 2340 &=& 2 \times 1170 \\
1170 : 2 &=& 585 & & 1170 &=& 2 \times 585 \\
585 : 3 &=& 195 & & 585 &=& 3 \times 195 \\
195 : 3 &=& 65 & & 195 &=& 3 \times 65 \\
& & & & 65 &=& 5 \times 13 \\
\hline
& & & & 4680 &=& 2\times2\times2\times3\times3\times5\times13.
\end{array}$$

3. Daß eine Zahl durch 2, 3, 5, . . . theilbar ist oder nicht, vermag man an den Resten zu erkennen, welche 10, 100, 1000, . . durch jene Zahlen dividirt übrig lassen.

a) Eine Zahl durch 2 oder 5 dividirt giebt denselben Rest, als ihre letzte Stelle, z. B. $387 = 380 + 7$. Nun ist 10 durch 2 und 5 theilbar, folglich auch 380, mithin hängt der Rest nur von der letzten Stelle 7 ab.

b) Eine Zahl durch 4 oder 25 dividirt giebt denselben Rest als die zweistellige Zahl, mit der die Zahl endigt, z. B. 1852 = 1800 + 52. Nun ist 100 durch 4 und 25 theilbar, folglich auch 1800, mithin hängt der Rest nur von den beiden letzten Stellen 52 ab.

c) Eine Zahl durch 3 oder 9 dividirt giebt denselben Rest als ihre Quersumme, z. B. 2837 = 2000 + 800 + 30 + 7. Nun giebt 10, 100, 1000 . . . durch 3 oder 9 dividirt den Rest 1, also 20, 200, 2000 . . . den Rest 2 u. s. f., mithin giebt die obige Zahl denselben Rest als 7 + 3 + 8 + 2 d. i. 20, welche die Quersumme oder Ziffernsumme der Zahl heißt.

d) Eine Zahl durch 11 dividirt giebt denselben Rest als die Summe der 1ten, 3ten, 5ten, . . Ziffer weniger die Summe der 2ten, 4ten, 6ten, . . Ziffer, von rechts nach links gezählt.

Z. B. 79 345 = 70 000 + 300 + 5
+ 9000 + 40

Nun giebt 100, 10 000, 1000 000, . . durch 11 dividirt den Rest 1, während bei 10, 1000, 100 000, . . 1 fehlt (am Aufgehen); folglich giebt 200, 20 000, 2000 000, . . den Rest 2, während bei 20, 2000, 200 000 . . . 2 fehlt, u. s. f. Also giebt die obige Zahl denselben Rest als 5 + 3 + 7 — 4 — 9 d. i. 2.

849 023 giebt denselben Rest als 3 + 0 + 4 — 2 — 9 — 8, oder (indem man 2 × 11 zulegt) als 29 — 19, d. i. 10. Die Zahl ist durch 11 theilbar, wenn jene Differenz 0, 11, 22, . . beträgt.

Die Auffindung der Reste einer Zahl bei andern Divisionen z. B. durch 7, 13, 17, u. s. w. auf dem angezeigten Wege ist weniger einfach und deshalb praktisch weniger wichtig. Dafür aber, daß eine Zahl Primzahl ist, giebt es kein einfaches Kennzeichen.

4. Um zu untersuchen, ob zwei gegebene Zahlen, deren Zusammensetzung unbekannt ist, einen gemeinschaftlichen Divisor haben, sucht man den Rest der größern Zahl in Bezug auf die kleinere, indem man jene durch diese dividirt, den Rest der kleinern in Bezug auf den vorigen Rest, den Rest des 1ten Restes in Bezug auf den 2ten, u. s. f. bis zum Rest 0. Ist der vorletzte Rest 1, so haben die Zahlen keinen von 1 verschiedenen gemeinschaftlichen Divisor und heißen prim zu einander (relative Primzahlen). Ist aber der vorletzte Rest von 1 verschieden, so ist er der größte gemeinschaftliche Divisor der beiden gegebenen Zahlen. Z. B. 2812 und 1292:

2812	giebt	in	Bezug	auf	1292	den	Rest	228
1292	=	=	=	=	228	=	=	152
228	=	=	=	=	152	=	=	76
152	=	=	=	=	76	=	=	0

Schema:

```
2) 2812 | 1292 (5
   2584 | 1140
1)  228 |  152 (2
    152 |  152
     76 |    0
```

Daher sind 2812 und 1292 durch 76 theilbar. Denn 76 geht auf
in 152 also auch in 152 + 76 d. i. 228,
" 228 × 5 d. i. 1140 " " " 1140 + 152 " 1292,
" 1292 × 2 " 2584 " " " 2584 + 228 " 2812.

In der That ist

```
2812 : 76 = 37.        1292 : 76 = 17.
228                    76
 532                    532
 532                    532
   0                      0
```

Eine Zahl aber, welche in 2812 und 1292 aufgeht, geht auch auf
in 1292 × 2 d. i. 2584, und in 2812—2584 d. i. 228,
" 228 × 5 " 1140, " " 1292—1140 " 152,
" " 228— 152 " 76,

und kann demnach nicht mehr als 76 betragen.

Bei den Zahlen 389 und 143 findet man als vorletzten Rest 1. Diese Zahlen haben also keinen gemeinschaftlichen Divisor, der mehr als 1 ist, und sind prim zu einander.

```
2) 389 | 143 (1
   286 | 103
2) 103 |  40 (1
    80 |  23
1)  23 |  17 (2
    17 |  12
1)   6 |   5 (5
     5 |   5
     1 |   0
```

Daß man auf dem angezeigten Wege endlich den Rest 0 finden muß, ergiebt sich daraus, daß die folgenden Reste immer geringer werden.

Die größte Zahl, welche in jeder von 3 gegebenen Zahlen aufgeht, geht in dem größten gemeinschaftlichen Divisor eines Paares auf. Berechnet man also den größten gemeinschaftlichen Divisor von 2 unter den gegebenen Zahlen, und wiederum den größten gemeinschaftlichen Divisor der gefundenen Zahl und der 3ten Zahl, so ist die zuletzt gefundene Zahl der größte gemeinschaftliche Divisor der 3 gegebenen Zahlen. U. s. w.

5. Unter einem **Dividuus** einer Zahl versteht man ein Vielches derselben (in welchem die gegebene Zahl aufgeht). Der **kleinste** :**meinschaftliche** Dividuus von 2 relativen Primzahlen ist ihr Proict, z. B. die kleinste Zahl, in der sowohl 12 als 35 aufgeht, ist 12 < 35. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der Zahlen 12 und 27, ren größter gemeinschaftlicher Divisor 3 ist, wird gefunden, indem man

12 mit dem 3ten Theil von 27 multiplicirt; 4×3 und 9×3 gehen in 12×9 auf.

Die kleinste Zahl, welche durch jede von 3 gegebenen Zahlen theilbar ist, ist durch den kleinsten gemeinsamen Dividuus eines Paares theilbar. Wenn man also den kleinsten gemeinsamen Dividuus von 2 unter den gegebenen Zahlen berechnet, und wiederum den kleinsten gemeinsamen Dividuus der gefundenen Zahl und der 3ten Zahl, so hat man den kleinsten gemeinsamen Dividuus der 3 gegebenen Zahlen. U. s. w.

§. 8. Von den Brüchen.

1. Ein **Bruch** ist der Quotient des Zählers durch den Nenner; er enthält so viel gleiche Theile als der Zähler angiebt, deren so viel auf eine Einheit gehen, als der Nenner angiebt, z. B. $\frac{5}{7} = 5 : 7$ und enthält 5 solche Theile, deren 7 auf eine Einheit gehen (§. 3, 3).

2. Der Bruch heißt

echt, wenn der Zähler kleiner als der Nenner, z. B. $\frac{3}{7}$.
unecht, " " " größer " " " " " $\frac{9}{7}$.

Ein Bruch wie $\frac{7}{7}$, $\frac{14}{7}$, $\frac{21}{7}$, . . ., dessen Zähler dem Nenner gleich oder ein Vielfaches desselben ist, wird ein uneigentlicher genannt. Ein echter Bruch ist weniger als 1, ein unechter Bruch ist mehr als 1, ein uneigentlicher Bruch ist einer ganzen Zahl gleich.

Ein unechter Bruch kann in eine ganze Zahl und einen echten Bruch (eine gemischte Zahl) zerlegt werden. Eine gemischte Zahl kann in einen unechten Bruch eingerichtet werden. Z. B.

$$\frac{347}{36} = 347 : 36 = 9\tfrac{23}{36}, \qquad \begin{array}{r} 324 \\ \hline 23 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 28\tfrac{19}{36} \\ \hline 84 \\ 168 \\ \;\;19 \\ \hline = \tfrac{1027}{36} \end{array}$$

Nämlich 1 giebt $\frac{36}{36}$, 28 giebt $\frac{28 \times 36}{36}$, $28\frac{19}{36}$ giebt $\frac{28 \times 36 + 19}{36}$. Eine gemischte Zahl ist wie eine mehrfach benannte Zahl anzusehen, das Einrichten entspricht dem Resolviren, das Zerlegen dem Reduciren (§. 4, 2).

3. Ein Bruch kann ohne Aenderung seines Werthes anders ausgedrückt werden, wenn man die Theile der Einheit, deren einen oder mehrere der Bruch enthält, wiederum eintheilt; z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} \cdots$$
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} \cdots$$
$$\frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35} \cdots$$

indem man jeden der 2, 3, 7 Theile der Einheit in 2, 3, 4, 5, . . gleiche Theile theilt, wodurch Zähler und Nenner 2, 3, 4, 5, . . mal so groß werden.

Man kann also den Zähler und den Nenner eines Bruches mit derselben beliebigen Zahl multipliciren, z. B.

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 7}{8 \times 7} = \frac{35}{36}.$$

8tel können in 144tel verwandelt werden, weil 144 durch 8 theilbar ist; man multiplicirt den Zähler und den Nenner mit 144 : 8. Dagegen können 8tel nicht genau in 108tel verwandelt werden, weil 8 in 108 nicht aufgeht.

Umgekehrt kann man auch den Zähler und den Nenner eines Bruches durch dieselbe beliebige Zahl dividiren, z. B.

$$\frac{26}{65} = \frac{26 : 13}{65 : 13} = \frac{2}{5}.$$

Man kürzt den Ausdruck des Bruches, indem man seinen Zähler und Nenner durch einen gemeinschaftlichen Divisor derselben dividirt. Ist der Zähler prim zum Nenner (§. 7, 4), so hat der Bruch seinen einfachsten und anschaulichsten Ausdruck.

Da 1 Fuß = 12 Zoll = 12 $\times$ 12 d. i. 144 Linien, so sind
1 Zoll = $\frac{1}{12}$ Fuß, 1 Linie = $\frac{1}{12}$ Zoll = $\frac{1}{144}$ Fuß,
3 Zoll = $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ Fuß, 8 Linien = $\frac{8}{12}$ oder $\frac{2}{3}$ Zoll,
7 Zoll 6 Linien = 90 Linien = $\frac{90}{144}$ d. i. $\frac{5}{8}$ Fuß, u. s. w.

$\frac{4}{7}$ kann näherungsweise in 12tel verwandelt werden, indem man beiderseits mit 12 multiplicirt und (näherungsweise) durch 7 dividirt:

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 12}{7 \times 12} = \frac{48 : 7}{12} = \frac{7}{12} \text{ genauer als } \frac{6}{12} \text{ (§. 3, 4).}$$

Man kann die Umformung der Brüche auch durch die Bemerkung erläutern, daß 7 $\times$ 9 in 5 $\times$ 9, wie 7 Thlr. in 5 Thlrn., ebensovielmal enthalten ist, als 7 in 5 (§. 3, 2), daß folglich $\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$ ist.

Die Umformung von Brüchen durch Division kommt besonders bei der Multiplication und Division der Brüche in Anwendung. Durch gehörige Multiplication ihrer Nenner und Zähler werden die Brüche auf denselben Nenner gebracht, und damit zur Vergleichung, so wie zur Addition und Subtraction geeignet.

§. 9. Addition und Subtraction der Brüche.

1. Brüche von demselben Nenner werden addirt oder subtrahirt, indem man die Zähler addirt oder subtrahirt. Z. B. $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2 + 3}{7} = \frac{5}{7}$, weil 2 Theile + 3 Theile, deren 7 auf eine Einheit gehen, 5 solche Theile sind.

$$2\tfrac{3}{5} + 3\tfrac{2}{5} = \tfrac{3}{5} + \tfrac{2}{5} + 2 + 3 = 6.$$

$$\tfrac{9}{11} - \tfrac{4}{11} = \frac{9-4}{11} = \tfrac{5}{11},$$

$$1 - \tfrac{3}{8} = \tfrac{8}{8} - \tfrac{3}{8} = \tfrac{5}{8}.$$

$6\tfrac{2}{7} - 4\tfrac{4}{7} = 1\tfrac{5}{7}$. Man subtrahirt $4\tfrac{4}{7}$ von 5 und addirt die gefundenen $\tfrac{3}{7}$ zu $1\tfrac{2}{7}$.

2. Brüche von verschiedenen Nennern werden addirt oder subtrahirt, nachdem sie auf denselben Nenner gebracht worden (§. 8, 3).

Die Brüche $\tfrac{3}{5}$ und $\tfrac{4}{7}$ erhalten beide den Nenner 5×7 d. i. 35, wenn man den Nenner und den Zähler bei dem ersten mit 7, bei dem zweiten mit 5 multiplicirt (§. 8, 3). Die statt der Brüche $\tfrac{3}{5}$ und $\tfrac{4}{7}$ gefundenen $\tfrac{21}{35}$ und $\tfrac{20}{35}$ können addirt und subtrahirt werden.

Die Brüche $\tfrac{7}{12}$ und $\tfrac{3}{4}$, wovon der Nenner 4 im Nenner 12 aufgeht, brauchen nicht einen größeren Nenner als 12 zu erhalten, weil

$$\frac{3}{4} = \frac{3\,.\,3}{4\,.\,3} = \frac{9}{12}.$$

Die Brüche $\tfrac{7}{12}$ und $\tfrac{5}{9}$, deren Nenner den gemeinschaftlichen Divisor 3 haben, brauchen nicht auf den Nenner 12×9, sondern nur auf den Nenner 12×3 d. i. 36 gebracht zu werden, indem man bei dem ersten Bruch mit 36 : 12 d. i. 3, bei dem zweiten mit 36 : 9 d. i. 4 den Nenner und den Zähler multiplicirt. So erhält man statt $\tfrac{7}{12}$ und $\tfrac{5}{9}$ die gleichnamigen Brüche $\tfrac{21}{36}$ und $\tfrac{20}{36}$.

3. Der kleinste Nenner, auf welchen mehrere Brüche gebracht werden können (Generalnenner), ist der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der einzelnen Nenner (§. 7, 4). Um denselben unmittelbar zu berechnen, läßt man die Nenner unbeachtet, welche in andern Nennern aufgehen, und multiplicirt die gemeinschaftlichen Divisoren der übrigen Nenner mit den besondern Divisoren derselben. Es seien z. B. die Nenner der Brüche

18 12 15 6 24 35 10 4 21 105 56.

Man streicht 6, 4, 12, weil sie in 24 aufgehen, und 15, 21, 35, weil sie in 105 aufgehen. (Eine Unterlassung in dieser Hinsicht bringt keinen Fehler.) Von den Nennern

18 24 10 105 56

haben 18, 24, 10, 56 den gemeinschaftlichen Divisor 2, und ihr gemeinschaftlicher Nenner ist 2mal so groß, als ihn die Nenner

9 12 5 105 28

erfordern. Hiervon fällt der Nenner 5 weg, weil er in 105 aufgeht. Von den Nennern

9 12 105 28

haben 12 und 28 den gemeinschaftlichen Factor 2. Ihr Generalnenner ist 2mal so groß als der für die Nenner

9 6 105 14

erforderliche, welcher wiederum 2mal so groß ist als der, auf welchen die Nenner

9 3 105 7

gebracht werden können. Von diesen bleiben 3 und 7 unbeachtet, weil sie in 105 aufgehen. Die Nenner 9 und 105 haben aber den gemeinschaftlichen Divisor 3, und erfordern den gemeinschaftlichen Nenner 3 × 3 × 35, mithin ist der gesuchte kleinste Generalnenner 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 7 = 2520.

Schema:	18	(12)	(15)	(6)	24	(35)	10	(4)	(21)	105	56	(2
	9				12		(5)			105	28	(2
	9				6					105	14	(2
	9				(3)					105	(7)	(3
	3									35		

2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 7 = 2520.

Man hebt nur einfache gemeinschaftliche Divisoren (2, 3, 5, 7 . . .) in aufsteigender Ordnung aus, um nicht möglicherweise durch unnöthige Factoren den Generalnenner zu vergrößern.

Um für die einzelnen Brüche die Zahlen zu finden, mit denen die Zähler wie die Nenner zu multipliciren sind, kann man die §. 7, 2 gemachten Bemerkungen benutzen.

18	d. i.	2×3×3	in 2520	ist	2×2×5×7	d. i.	140mal enth.
12	„ „	2×2×3	„ „	„	2×3×5×7	„ „	210 „ „
15	„ „	3×5	„ „	„	2×2×2×3×7	„ „	168 „ „
6	„ „	2×3	„ „	„	2×2×3×5×7	„ „	420 „ „
24	„ „	2×2×2×3	„ „	„	3×5×7	„ „	105 „ „
35	„ „	5×7	„ „	„	2×2×2×3×3	„ „	72 „ „
10	„ „	2×5	„ „	„	2×2×3×3×7	„ „	252 „ „
4	„ „	2×2	„ „	„	2×3×3×5×7	„ „	630 „ „
21	„ „	3×7	„ „	„	2×2×2×3×5	„ „	120 „ „
105	„ „	3×5×7	„ „	„	2×2×2×3	„ „	24 „ „
56	„ „	2×2×2×7	„ „	„	3×3×5	„ „	45 „ „

Beispiel.

$15\frac{13}{21}$	52	676 (22)
+ $13\frac{37}{39}$	28	1036
+ $28\frac{19}{52}$	21	399
+ $35\frac{7}{12}$	91	637
22		2748 : 1092
		2184
93		$\frac{564}{1092}$ od. $\frac{47}{91}$

21	39	52	12	(2
21	39	26	6	(2
21	39	(13)	(3)	(3
7	13			

2×2×3×7×13=1092.

1092 : 21=52, 13×51= 676.
„ 39=28, 37×28=1076.
„ 52=51, 19×21= 399.
„ 12=91, 7×91= 637.

$$\frac{13}{21} = \frac{13 \cdot 52}{21 \cdot 52} = \frac{676}{1092} \text{ u. s. w.}$$

$\frac{2748}{1092} = 2\frac{564}{1092}$, welcher Bruch verkürzt werden kann, indem beiderseits durch 4 und durch 3, also durch 12 dividirt wird.

Oder:

	$15\frac{13}{21}$	4	52 : 84
+	$35\frac{7}{12}$	7	49
	1		101
			84
	51 . . . $\frac{17}{84}$		

	$13\frac{37}{39}$	4	148 : 156
+	$28\frac{19}{52}$	3	57
	1		205
			156
	42 . . . $\frac{49}{156}$		

	$51\frac{17}{84}$	13	221 : 1092
+	$42\frac{49}{156}$	7	343
	93 . . . $\frac{564}{1092}$ od. $\frac{47}{91}$		

	$93\frac{47}{91}$	3	141 : 273
—	$15\frac{13}{21}$	13	169
	77 . . . $\frac{245}{273}$		

	$77\frac{245}{273}$		245 : 273
—	$13\frac{37}{39}$	7	259
	63 . . . $\frac{259}{273}$ od. $\frac{37}{39}$		

	$63\frac{37}{39}$	4	148 : 156
—	$28\frac{19}{52}$	3	57
	35 . . $\frac{91}{156}$ od. $\frac{7}{12}$.		

Man subtrahirt $\frac{169}{273}$ von 1 d. i. $\frac{273}{273}$, und addirt die Differenz zu $\frac{141}{273}$, u. s. w.

§. 10. Multiplication und Division eines Bruches durch ganze Zahlen.

1. Um einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu **multipliciren**, multiplicirt man den Zähler; z. B. $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$. Denn 3 Theile, deren 4 auf eine Einheit gehen, 5mal genommen, sind 3×5 solche Theile. Oder: den 4ten Theil von 3 erhält man 5mal, indem man den 4ten Theil von 3×5 nimmt.

Der zu berechnende Bruch ist vor der Berechnung so viel als möglich zu verkürzen (§. 8, 3), z. B.

$$\frac{3}{8} \times 12 = \frac{3 \times 12}{8} = \frac{3 \times 3}{2} = 4\frac{1}{2}.$$

$$\frac{3}{4} \times 8 = \frac{3 \times 8}{4} = 3 \times 2 = 6.$$

$\frac{3}{8} \times 8 = 3$, d. h. Bruch $\times$ Nenner $=$ Zähler, weil der Bruch der Quotient des Zählers durch den Nenner ist, und Quotient $\times$ Divisor $=$ Dividendus (§. 3, 1).

Um **eine gemischte Zahl** zu multipliciren, multiplicirt man entweder den Bruch und die ganze Zahl und addirt die Producte, oder man richtet die gemischte Zahl ein und verfährt wie oben.

Z. B. $86\frac{9}{26} \times 48$

16	216 : 13
688	86
344	$\frac{8}{13}$
4144	

oder: $86\frac{9}{26} \times 48$

172
516
9

$$\frac{2245 \times 48}{26} = \frac{2245 \times 24}{13}$$

4490
8980
53880 : 13 = $4144\frac{8}{13}$.
18
58
60
8

Eben so bei mehrfach benannten Zahlen.

2. Um einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, multiplicirt man den Nenner; z. B.

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20} \text{ (zu lesen: „3 durch 4mal 5").}$$

Theilt man die 4tel einer Einheit in je 5 gleiche Theile, mithin die Einheit in 4×5 d. i. 20 Theile, so erhält man $\frac{1}{20}$ als 5ten Theil von $\frac{1}{4}$, und $\frac{3}{20}$ als 5ten Theil von $\frac{3}{4}$. In der That giebt der Quotient $\frac{3}{4 \times 5}$ oder $\frac{3}{20}$, multiplicirt mit dem Divisor 5, den Dividendus $\frac{3}{4}$ (§. 3, 1).

Der zu berechnende Bruch ist vor der Berechnung soviel als möglich zu verkürzen, z. B.

$$\frac{25}{28} : 15 = \frac{25}{28 \times 15} = \frac{5}{28 \times 3} = \frac{5}{84}$$

$$\frac{25}{28} : 25 = \frac{1}{28}, \qquad \frac{25}{28} : 5 = \frac{5}{28}.$$

Man kann den Zähler sofort dividiren, wenn kein Rest bleibt.

Um eine gemischte Zahl zu dividiren, dividirt man die ganze Zahl, wenn sie größer ist als der Divisor, richtet die als Rest verbliebene gemischte Zahl ein und verfährt wie vorher. Man kann auch die gegebene gemischte Zahl einrichten und wie oben verfahren.

Z. B. $826\frac{5}{8} : 17 = 48\frac{5}{8}$ oder: $826\frac{5}{8} : 17$

68 $\qquad \frac{6613}{8 \times 17} = \frac{389}{8} = 48\frac{5}{8}$

146

136

$10\frac{5}{8} : 17 = \frac{85}{8 \times 17}$

$52\frac{26}{43} : 39 = 4\frac{2}{43} : 3$, indem man beide Theile der gemischten Zahl und den Divisor durch 13 dividirt.

Um 18 Sgr. $7\frac{1}{5}$ Pf. auf einen Thalerbruch zu reduciren, sagt man zunächst: $7\frac{1}{5}$ Pf. $= 7\frac{1}{5} : 12$ Sgr. $= \frac{3}{5}$ Sgr. Dann $18\frac{3}{5}$ Sgr. $= 8\frac{3}{5} : 30$ Thlr. $= \frac{31}{50}$ Thlr. Um $\frac{25}{36}$ Thaler zu resolviren, sagt man nun kürzer als §. 4 gezeigt wurde:

$\frac{25}{36}$ Thlr. $= \frac{25}{36} \times 30$ Sgr. $= \frac{125}{6}$ d. i. $20\frac{5}{6}$ Sgr., und $\frac{5}{6}$ Sgr. $= \frac{5}{6} \times 12$ Pf. $= 10$ Pf., daher $\frac{25}{36}$ Thlr. $= 20$ Sgr. 10 Pf.

§. 11. Multiplication und Division durch einen Bruch.

1. Anstatt des ausführlichern Ausdrucks „den 4ten Theil einer Größe 3mal nehmen" gebraucht man den kürzern „$\frac{3}{4}$ (von) der Größe nehmen" oder „die Größe $\frac{3}{4}$mal nehmen", obgleich ein Multiplicator

ursprünglich nur eine ganze Zahl sein kann (§. 2, 3). Z. B. $\frac{3}{4}$ von 5 Ctr. sind $\frac{3 \times 5}{4}$ d. i. $3\frac{3}{4}$ Ctr. Bei dem Ausdruck „$\frac{3}{4}$ von 5 Ctr." ist nicht etwa an Subtrahiren von einem Minuendus zu denken. Bestimmter sagt man: $\frac{3}{4}$mal 5 Ctr.

Mit einem Bruche multipliciren ist daher: durch den Nenner dividiren, und den Quotienten mit dem Zähler multipliciren; oder mit dem Zähler multipliciren und das Product durch den Nenner dividiren. Z. B. Um eine Größe mit $\frac{3}{4}$ zu multipliciren, kann man entweder die Größe durch 4 dividiren und den Quotienten mit 3 multipliciren, oder die Größe mit 3 multipliciren und das Product durch 4 dividiren. Denn der 4te Theil der 3fachen Größe ist 3mal so groß als der 4te Theil der einfachen Größe.

Um die jährlichen Zinsen eines Capitals zu 4 Procent zu berechnen, hat man, weil 100 Thlr. Capital 4 Thlr. Zinsen geben, mithin 1 Thlr. Capital $\frac{4}{100}$ Thlr. Zinsen (§. 6), das Capital mit $\frac{4}{100}$, bei 5 Proc. mit $\frac{5}{100}$, bei $3\frac{1}{2}$ Proc. mit $3\frac{1}{2} : 100$ d. i. $\frac{7}{200}$ zu multipliciren. Der Ausdruck Procent vertritt den Nenner 100.

2. Um einen Bruch mit einem Bruch zu multipliciren, multiplicirt man den Zähler mit dem Zähler und den Nenner mit dem Nenner. Z. B.

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{3 \times 5}{4 \times 7} = \frac{15}{28}.$$

Denn $\frac{3}{4} : 7$ oder $\frac{3}{4 \times 7}$ mit 5 multiplicirt giebt $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$ (zu lesen: „3mal 5 durch 4mal 7"). Oder $\frac{3}{4} \times 5$ d. i. $\frac{3 \times 5}{4}$ durch 7 dividirt giebt $\frac{3 \times 5}{4 \times 7}$, wie vorhin.

$$\frac{12}{25} \times \frac{15}{16} = \frac{12 \times 15}{25 \times 16} = \frac{3 \times 3}{5 \times 4} = \frac{9}{20}.$$

$$\frac{7}{12} \times \frac{4}{21} = \frac{7 \times 4}{12 \times 21} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{7}{90} \times \frac{8}{21} \times \frac{3}{8} \times 20 = \frac{7 \times 8 \times 3 \times 20}{90 \times 21 \times 8} = \frac{2}{9}.$$

Um mit einer gemischten Zahl zu multipliciren, multiplicirt man entweder mit dem Bruch und mit der ganzen Zahl und addirt die Producte, oder man richtet die gemischte Zahl ein und multiplicirt mit dem unechten Bruche.

Z. B. $45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3} =$

$\frac{3}{4} \times$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
$45 \times$	$\frac{2}{3}$	30
$\frac{3}{4} \times$	17	$12\frac{3}{4}$
$45 \times$	17	315
		45
		$= 808\frac{1}{4}$

Oder: $45\frac{3}{4} \times 17\frac{2}{3} = \frac{183 \times 53}{4 \times 3} = 61 \times 53 : 4$

$$\begin{array}{r} 53 \\ 318 \\ \hline 3233 : 4 = 808\frac{1}{4}. \end{array}$$

$2\frac{11}{12} \times 3\frac{2}{5} \times 2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{17} = \frac{35 \times 17 \times 9 \times 52}{22 \times 5 \times 4 \times 17} = \frac{7 \times 3 \times 13}{4} = 68\frac{1}{4}.$

Um eine mehrfach benannte Zahl, welche einen Bruch enthält, mit $27\frac{2}{5}$ zu multipliciren, berechnet man den 5ten Theil derselben, multiplicirt diesen mit 2, sowie die gegebene Zahl mit 27 und addirt die Producte; oder man multiplicirt den 5ten Theil sofort mit 137. Auch kann man die gegebene Zahl resolviren, mit $\frac{137}{5}$ multipliciren und das Product reduciren. Z. B.

18 Ctr. 57 Pfd. $19\frac{5}{7}$ Loth $\times 27\frac{2}{5}$.

3 〃	77 〃	$16\frac{26}{35}$ 〃	
18 〃	57 〃	$19\frac{5}{7}$ 〃	: 5
3	330	64	
	387	83	
	37	33	
	2	$3\frac{5}{7} = \frac{26}{7}$	

3 〃	77 〃	16 $\frac{26}{35}$ 〃	$\times 2$
1	1	1 52	
6	154	35	
7 〃	155	$\frac{17}{35}$ 〃	
	45 〃		

18 〃	57 〃	19	$\frac{5}{7}$ 〃 $\times 27$
14	16	19	135 : 7
216	399	243	65
27	114	27	$\frac{2}{7}$ 〃
500 〃	1555	532	
	45	32	
	15 〃	212	
		192	
		20 〃	

7 〃	45 〃	$1\frac{17}{35}$ 〃
500 〃	15 〃	$20\frac{2}{7}$ 〃
507 Ctr.	60 Pfd.	$21\frac{27}{35}$ Loth.

Oder: 3 Ctr. 77 Pfd. 16 $\frac{26}{35}$ Loth × 137

96 71 101 822
411 959 822 274
507 , 959 137 3562 : 35
10620 2239 62
72 224 35
60 , 53 $\frac{27}{35}$
32
21

Oder: 18 Ctr. 57 Pfd. 19 $\frac{5}{7}$ Loth.

1980
57
2037 Pfd.
6111
4074
19 $\frac{5}{7}$
65203 $\frac{5}{7}$ Loth.
$\frac{456426}{7}$ Loth × $\frac{137}{35}$
456426
1369278
3194982
62530362 ℒ : 35 = 1786581 ℒ : 32 = 55830 ℔ : 110 = 507 Ctr.

35 160 83
275 186 60 ℔.
245 160
303 265
280 256
230 98
210 96
203 21 Loth.
175
286
280
62
35
$\frac{27}{35}$

3. Um durch einen Bruch zu dividiren, multiplicirt man mit dem umgekehrten (reciproken) Bruch; z. B.

$$3 : \tfrac{4}{5} = 3 \times \tfrac{5}{4} = \frac{3 \times 5}{4} = 3\tfrac{3}{4}.$$

Die Aufgabe, 3 durch $\frac{4}{5}$ zu dividiren, entspringt zunächst daraus, daß man das Verhältniß von 3 zu $\frac{4}{5}$ sucht, d. h. fragt, wievielmal $\frac{4}{5}$ in 3

enthalten ist. Nun ist $3 = \frac{3 \times 5}{5}$ und $\frac{4}{5}$ in $\frac{3 \times 5}{5}$ sovielmal enthalten als 4 in 3×5, nämlich $\frac{3 \times 5}{4}$mal. Es entsteht aber $\frac{3 \times 5}{4}$ dadurch aus 3, daß man mit dem Bruche $\frac{5}{4}$ multiplicirt, welcher durch Umkehrung des Bruches $\frac{4}{5}$ gebildet ist.

Zu demselben Ziele führt die Ueberlegung: $\frac{1}{5}$ in 1 ist 5mal, $\frac{4}{5}$ in 1 ist den 4ten Theil soviel d. i. $\frac{5}{4}$mal, $\frac{4}{5}$ in 3 ist 3mal soviel d. i. $\frac{5 \times 3}{4}$mal enthalten u. s. w.

Die Richtigkeit des Quotienten $3 \times \frac{4}{5}$ bestätigt sich, indem er mit dem Divisor $\frac{4}{5}$ multiplicirt den Dividendus 3 giebt (§. 3, 1).

Ebenso ist $3\frac{2}{7} : \frac{4}{5} = 3\frac{2}{7} \times \frac{5}{4} = \frac{23 \times 5}{7 \times 4} = \frac{115}{28} = 4\frac{3}{28}$, weil $3\frac{2}{7} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} = 3\frac{2}{7}$. (Um den Quotienten auf dem andern Wege zu finden, müßte man die Brüche auf denselben Nenner bringen.)

$$3\frac{2}{7} : \frac{1}{5} = 3\frac{2}{7} \times 5, \quad 1 : \frac{1}{5} = 5, \quad 1 : \frac{3}{5} = \frac{5}{3}, \text{ u. s. w.}$$

4. Um durch eine gemischte Zahl zu dividiren, muß man sie einrichten und mit dem umgekehrten Bruch multipliciren. Z. B.

$$3 : 5\frac{7}{8} = 3 : \frac{47}{8} = 3 \times \frac{8}{47} = \frac{24}{47}.$$

$$3\frac{5}{7} : 5\frac{7}{8} = \frac{26 \times 8}{7 \times 47} = \frac{208}{329}.$$

Es ist $3 : 5\frac{7}{8}$ weniger als $3 : 5$, weil der Divisor $5\frac{7}{8}$ mehr als 5 ist. Mit den Theilen des gemischten Divisors kann nicht ohne Weiteres gerechnet werden.

Die Aufgabe: 7 Thlr. 13 Sgr. durch $2\frac{5}{6}$ zu dividiren, den Quotienten mit $5\frac{1}{3}$ zu multipliciren, das Product durch $5\frac{2}{5}$ zu dividiren und den Quotienten mit $1\frac{4}{5}$ zu multipliciren, — wird nach §. 10 bezeichnet

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 5\frac{1}{3} \times 1\frac{4}{5}}{2\frac{5}{6} \times 5\frac{2}{5}}$$

und giebt nach Anwendung der vorstehenden Regeln

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 6 \times 16 \times 5 \times 9}{17 \times 3 \times 27 \times 5}$$

oder verkürzt

$$\frac{7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times 2 \times 16}{17 \times 3} = 7 \text{ Thlr. } 13 \text{ Sgr.} \times \frac{32}{51}.$$

Der Ausdruck „durch einen Bruch dividiren" ist nicht weniger künstlich, als der Ausdruck „mit einem Bruche multipliciren", wenn der Quotient einen Theil des Dividendus bedeuten soll. Der Ausdruck „eine Größe durch $\frac{4}{5}$ dividiren" oder „den $\frac{4}{5}$ten Theil der Größe nehmen" ist aber gleichberechtigt und nach dem Obigen gleich-

bedeutend mit dem Ausdrucke „die Größe $\frac{4}{7}$mal nehmen" (§. 3, 3). Daß eine Zahl durch einen echten Bruch dividirt größer wird, ist ebenso wenig befremdlich, als daß sie mit einem echten Bruch multiplicirt kleiner wird.

§. 12. Einfache und zusammengesetzte Regel de tri mit Brüchen.

1. Die in §. 5 aufgestellten Sätze behalten ihre Geltung, wenn man statt der dort vorkommenden ganzen Zahlen Brüche oder gemischte Zahlen einführt.

Z. B. $\frac{1}{7}$ Pfd. kostet den 7ten Theil soviel als 1 Pfd., und $\frac{4}{7}$ Pfd. kosten 4mal den 7ten Theil soviel als 1 Pfd., wofür nach §. 11, 1 gesagt wird:

$\frac{4}{7}$ Pfd. kosten $\frac{4}{7}$mal soviel als 1 Pfd.

eben so wie man sagt:

5 Pfd. kosten 5mal soviel als 1 Pfd.

Ferner kostet 1 Pfd. 9mal soviel als $\frac{1}{9}$ Pfd., 5 Pfd. 9mal soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd., daher kostet 1 Pfd. 9mal den 5ten Theil soviel d. i. $\frac{9}{5}$mal soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd. Mit $\frac{9}{5}$ multipliciren ist aber dasselbe, als durch $\frac{5}{9}$ dividiren oder den $\frac{5}{9}$ten Theil nehmen (§. 11, 4); daher kann man den Satz

1 Pfd. kostet $\frac{9}{5}$mal soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd.

auch wie folgt aussprechen:

1 Pfund kostet den $\frac{5}{9}$ten Theil soviel als $\frac{5}{9}$ Pfd.

eben so wie man bei ganzen Zahlen sagt:

1 Pfd. kostet den 6ten Theil soviel als 6 Pfd.

Die einzelnen Sätze der Regel de tri (§. 6) lassen sich daher mit Brüchen genau eben so aufstellen, als mit ganzen Zahlen.

Aufgabe.

$9\frac{3}{5}$ Ctr. Waare kosten 472 Thlr. 20 Sgr., wieviel werden $34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten?

Aufl. $9\frac{3}{5}$ Ctr. kosten 472 Thlr. 20 Sgr.
1 Ctr. kostet den $9\frac{3}{5}$ten Theil soviel d. i.

$$\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.}}{9\frac{3}{5}}$$

$34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten $34\frac{2}{7}$mal soviel d. i.

$$\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.} \times 34\frac{2}{7}}{9\frac{3}{5}}$$

Ausr. $\frac{472 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.} \times 240 \times 5}{7 \times 48} = \frac{118 \text{ Thlr. } 5 \text{ Sgr.} \times 100}{7}$

$= 11\,816 \text{ Thlr. } 20 \text{ Sgr.} : 7 = 1688 \text{ Thlr. } 2\frac{6}{7} \text{ Sgr.}$

Antw. $34\frac{2}{7}$ Ctr. kosten 1688 Thlr. $2\frac{6}{7}$ Sgr.

Aufgabe.

Ein Forst ist 17 Jahre lang um $1\frac{3}{4}$ Proc. seines anfänglichen Bestandes jährlich gewachsen und hält 16 608 Klaftern. Wie groß war der anfängliche Bestand?

Aufl. Aus 100 Klaftern wurden in 1 Jahr $100 + 1\frac{3}{4}$, in 2 Jahren $100 + 1\frac{3}{4} \times 2$, in 17 Jahren $100 + 1\frac{3}{4} \times 17$ d. i. $129\frac{3}{4}$ Klaftern. Weil nach dem anfänglichen Bestand gefragt ist, so sagt man:

$129\frac{3}{4}$ Klaftern sind aus 100 Klaftern entstanden,

1 „ „ „ $\frac{100 \text{ Kl.}}{129\frac{3}{4}}$

16 608 „ „ „ $\frac{100 \text{ Kl.} \times 16\,608}{129\frac{3}{4}}$ „

Ausr. $\frac{100 \text{ Kl.} \times 16\,608 \times 4}{519} = 100 \text{ Kl.} \times 32 \times 4 = 12\,800 \text{ Kl.}$

Antw. Der anfängliche Bestand war 12 800 Klaftern.

Aufgabe.

Als der Scheffel Korn $4\frac{3}{4}$ Thlr. kostete, erhielt man für 10 Sgr. $7\frac{1}{2}$ Pfd. Brod; wieviel erhält man, wenn der Scheffel $3\frac{1}{3}$ Thlr. kostet?

Aufl. Bei $4\frac{3}{4}$ Thlr. Kornpreis erhielt man $7\frac{1}{2}$ Pfd. Brod

„ 1 „ „ „ „ $7\frac{1}{2}$ Pfd. $\times 4\frac{3}{4}$

„ $3\frac{1}{3}$ „ „ „ „ $\frac{7\frac{1}{2} \text{ Pfd.} \times 4\frac{3}{4}}{3\frac{1}{3}}$

Ausr. $\frac{15 \text{ Pfd.} \times 19 \times 3}{2 \times 4 \times 10} = 10 \text{ Pfd. } 22 \text{ Loth.}$

Antw. Wenn der Scheffel Korn $3\frac{1}{3}$ Thlr. kostet, so erhält man für 10 Sgr. 10 Pfd. 22 Loth Brod.

Aufgabe.

Ein Ochs auf der Weide an einem $7\frac{1}{2}$ Fuß langen Seile frißt in Tagen das Gras ab, welches er erreichen kann. Wieviel Tage kommt aus, wenn das Seil $13\frac{3}{4}$ Fuß lang ist?

Auflösung.

Wenn das Seil $7\frac{1}{2}$ Fuß lang, so reicht der Ochs 2 Tage

= = = 1 = = = = = = $\frac{2 \ \text{=}}{7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}}$

= = = $13\frac{3}{4}$ = = = = = = $\frac{2\ \text{Tage} \times 13\frac{3}{4} \times 13\frac{3}{4}}{7\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2}}$

Denn der Kreis von 2 Fuß Radius hat 2×2mal soviel Fläche als der Kreis von 1 Fuß Radius, u. s. w. (§. 5, 4).

Ausr. $\frac{2\ \text{T.} \times 55 \times 55 \times 2 \times 2}{4 \times 4 \times 15 \times 15} = \frac{11 \times 11}{2 \times 3 \times 3} = 6\frac{13}{18}$ Tage.

Antw. Wenn das Seil $13\frac{3}{4}$ Fuß lang ist, so hat der Ochs $6\frac{13}{18}$ d. i. fast 7 Tage zu fressen.

Aufgabe.

$3\frac{3}{8}$ Quart füllen einen Würfel von 6 Zoll Länge. Wieviel faßt ein Würfel von 4 Fuß 4 Zoll Länge?

Aufl. Der Würfel von 6 Zoll Länge faßt $3\frac{3}{8}$ Quart

= = = 1 = = = $\frac{3\frac{3}{8}\ \text{Quart}}{6 \times 6 \times 6}$

= = = 52 = = = $\frac{3\frac{3}{8}\ \text{Qu.} \times 52 \times 52 \times 52}{6 \times 6 \times 6}$

Ausr. $\frac{27 \times 52 \times 52 \times 52}{8 \times 6 \times 6 \times 6} = 13 \times 13 \times 13 = 2197.$

Antw. Ein Würfel von 4 Fuß 4 Zoll Länge faßt 2197 Quart.

2. Aufgaben, deren Lösung mehrfache Anwendung der Regel de tri erfordert, heißen Aufgaben der **zusammengesetzten Regel de tri** (Regula quinque, septem, u. s. w., Kettenregel).

Aufgabe.

Wenn 5 Ctr. für $2\frac{1}{2}$ Thlr. 14 Meilen weit geschafft werden, wieviel zahlt man für 21 Ctr. 25 Meilen weit?

Aufl. Für 5 Ctr. zahlt man $2\frac{1}{2}$ Thlr., und bei gleicher Entfernung für 1 Ctr. den 5ten Theil, für 21 Ctr. 21mal so viel, d. i.

$$\frac{2\frac{1}{2}\ \text{Thlr.} \times 21}{5}$$

Diese Last 1 Meile weit zu schaffen kostet den 14ten Theil, 25 Meilen weit 25mal soviel, also

$$\frac{2\frac{1}{2}\ \text{Thlr.} \times 21 \times 25}{5 \times 14}.$$

Ausr. $\frac{5 \times 21 \times 25}{2 \times 5 \times 14} = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$.

Antw. 21 Ctr. 25 Meilen weit kosten $18\frac{3}{4}$ Thlr.

Aufgabe.

Zu wieviel Procent war das Capital 6300 Thlr. ausgeliehen, wenn es in 20 Jahren 5670 Thlr. Zinsen getragen hat?

Aufl. 6300 Thlr. trugen in 20 Jahren 5670 Thlr. Zinsen, in 1 Jahr den 20ten Theil soviel; 1 Thlr. trug den 6300ten Theil, 100 Thlr. 100mal soviel, d. i.

$$\frac{5670 \text{ Thlr.} \times 100}{20 \times 6300} \text{ Zinsen.}$$

Ausr. $\frac{567}{2 \times 63} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$.

Antw. Das Capital 6300 Thlr. stand zu $4\frac{1}{2}$ Proc. Zinsen aus.

Aufgabe.

Einen Canal 735′ lang, 10′ tief, 21′ breit zu graben brauchen 140 Arbeiter, welche täglich $7\frac{1}{2}$ Stunde arbeiten, 546 Tage. Wie lang wird ein 15′ tiefer, 25′ breiter Canal, welcher in 324 Tagen, $8\frac{1}{3}$ Stunde täglich, 182 Arbeiter graben?

Aufl. Wenn der Canal 1′ statt 10′ tief ist, so wird er, unter sonst gleichen Umständen, 10mal so lang; wenn er 15′ statt 1′ tief ist, wird er den 15ten Theil so lang.

Wenn der Canal 1′ statt 21′ breit ist, so wird er 21mal so lang; wenn er 25′ statt 1′ breit ist, wird er den 25ten Theil so lang.

Wenn nicht 140, sondern 182 Arbeiter daran graben, so wird er den 140ten Theil 182mal so lang.

Wenn die Arbeiter nicht 546, sondern 324 Tage graben, so wird er den 546ten Theil 324mal so lang.

Wenn die Arbeiter täglich nicht $7\frac{1}{2}$, sondern $8\frac{1}{3}$ Stunde arbeiten, so wird er den $7\frac{1}{2}$ten Theil $8\frac{1}{3}$mal so lang. Also wird der Canal

$$\frac{735' \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 8\frac{1}{3}}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 7\frac{1}{2}} \text{ lang.}$$

Ausr. $\frac{735 \times 10 \times 21 \times 182 \times 324 \times 25 \times 2}{15 \times 25 \times 140 \times 546 \times 3 \times 15} = 352\frac{4}{5}$.

Antw. Dieser Canal wird $352\frac{4}{5}$ Fuß lang.

Aufgabe.

Wieviel preuß. Fuß sind 139 par. Fuß, da 15′ par. = 16′ engl., 28′ engl. = 27′ östr., 139′ östr. = 140′ preuß.?

Aufl. Da 1' par. = $\frac{16}{15}$' engl., so verwandelt man par. Fuß in engl. Fuß, indem man mit $\frac{16}{15}$ multiplicirt, u. s. w. Folglich

$$139' \text{ par.} = \frac{139' \times 16}{15} \text{ engl.} = \frac{139' \times 16 \times 27}{15 \times 28} \text{ östr.}$$

$$= \frac{139' \times 16 \times 27 \times 140}{15 \times 28 \times 139} \text{ preuß.}$$

Ausr. $\frac{139 \times 16 \times 27 \times 140}{15 \times 28 \times 139} = 16 \times 9 = 144.$

Antw. 139' par. = 144' preuß.

Aufgabe.

Wie theuer wird 1 leipziger Pfund Waare verkauft, von der 1 hamburger Pfund $6\frac{1}{4}$ Mark kostet, wenn die Versendung 5 Proc. Unkosten gemacht hat und 8 Proc. Gewinn genommen werden? (1 Mark = $\frac{2}{5}$ Thlr., 100 Pfd. hamb. = $103\frac{1}{2}$ Pfd. leipz.)

Aufl. 1 hamb. Pfd. kostet in Hamburg $\frac{5}{2}$ Thlr., in Leipzig bei 5 Proc. Unkosten $\frac{105}{100}$mal soviel; 1 leipz. Pfd. kostet $\frac{100}{103\frac{1}{2}}$mal soviel, und mit 8 Proc. Gewinn verkauft $\frac{108}{100}$mal soviel, also

$$\frac{5 \text{ Thlr.} \times 105 \times 100 \times 108}{2 \times 100 \times 103\frac{1}{2} \times 100}.$$

Ausr. $\frac{5 \times 105 \times 108}{207 \times 100} = \frac{7 \times 9}{23}$ Thlr. = 2 Thlr. 22 Ngr. $1\frac{17}{23}$ Pf.

Antw. Ein leipz. Pfund dieser Waare wird für 2 Thlr. 22 Ngr. $1\frac{17}{23}$ Pf. verkauft.

Aufgabe.

Es soll in Leipzig ein Wechsel von 1000 Ducaten auf Amsterdam gekauft werden. Der Amsterdamer Cours in Leipzig ist $143\frac{1}{2}$ (Thaler für 250 holl. Gulden des Wechsels). Der Ducaten gilt in Amsterdam 5 Gulden 68 Centimes (1 Gulden = 100 Cent.). Der Wechsler erhält $\frac{1}{3}$ Proc. nebst 1 Promille ($\frac{1}{1000}$) Mäklergebühr (Courtage). Wieviel kostet der Wechsel?

Aufl. 1000 Duc. = $1000 \times 5\frac{68}{100}$ Gulden

$$= \frac{1000 \times 5\frac{68}{100} \times 143\frac{1}{2}}{250} \text{ Thlr.}$$

mit $\frac{13}{30}$ Proc. Unkosten

$$= \frac{1000 \times 5\frac{68}{100} \times 143\frac{1}{2} \times 100\frac{13}{30}}{250 \times 100} \text{ Thlr.}$$

Ausr. $\frac{1000 \times 568 \times 287 \times 3013}{250 \times 100 \times 100 \times 2 \times 30} = 3274\frac{134416}{300000}$.

Antw. Der Wechsel kostet 3274 Thlr. 13 Ngr. 5 Pf.

§. 13. Theilung nach gegebenen Verhältnissen.

1. Wenn die gleichartigen Größen A, B, C, .. eine gewisse Größe (Einheit) der Reihe nach 2, 3, 5, .. mal enthalten, so verhalten sie sich zu einander der Reihe nach wie die Zahlen 2, 3, 5, .. d. h. das Verhältniß A : B ist 2 : 3, das Verhältniß A : C ist 2 : 5, das Verhältniß C : B ist 5 : 3, u. s. f. (§. 3, 2). Man vereinigt diese Angaben in dem Ausdruck

$$A : B : C = 2 : 3 : 5,$$

welcher eine Proportion*) genannt wird. Aus der Proportion erkennt man nicht nur, daß

$$A = \tfrac{2}{3}\, B, \quad A = \tfrac{2}{5}\, C,$$
$$B = \tfrac{3}{2}\, A, \quad B = \tfrac{3}{5}\, C, \text{ u. s. w.}$$

sondern auch, daß

$$\tfrac{1}{2}\, A = \tfrac{1}{3}\, B = \tfrac{1}{5}\, C,$$

und nach Multiplication mit 2 . 3 . 5,

$$15\, A = 10\, B = 6\, C.$$

Denn nach der Voraussetzung betragen $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{3}$ B, $\frac{1}{5}$ C je 1 Einheit.

2. Die Zahlen einer Proportion können sämmtlich mit derselben Zahl multiplicirt oder durch dieselbe Zahl dividirt werden, weil dadurch ihre Verhältnisse zu einander nicht verändert werden (§. 8, 3).

Wenn z. B.

$$A : B : C = \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{9},$$

so findet man

$$A : B : C = 24 : 27 : 20,$$

indem man $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$ mit dem Generalnenner 36 multiplicirt.

Wenn ferner

$$D : E : F = 21 : 28 : 35,$$

so findet man

$$D : E : F = 3 : 4 : 5,$$

indem man 21, 28, 35 durch ihren gemeinschaftlichen Divisor 7 dividirt.

3. Wenn A und B die Theile eines Ganzen sind und zu einander wie 2 und 3 sich verhalten, so hat das Ganze 2 + 3 d. i. 5 Einheiten, deren 2 auf A, 3 auf B kommen. Aus der Proportion der Theile

*) Vergl. 3tes Buch §. 1.

$$A : B = 2 : 3$$

erkennt man also, daß $A = \frac{2}{5}$ des Ganzen, $B = \frac{3}{5}$ des Ganzen ist.

Wenn A, B, C die Theile eines Ganzen sind und zu einander wie 2, 3, 5 sich verhalten, so hat das Ganze $2 + 3 + 5$ d. i. 10 Einheiten, deren 2 auf A, 3 auf B, 5 auf C kommen. Aus der Proportion der Theile

$$A : B : C = 2 : 3 : 5$$

folgt also, daß $A = \frac{2}{10}$ des Ganzen, $B = \frac{3}{10}$ des Ganzen, $C = \frac{5}{10}$ des Ganzen ist.

4. Gesellschaftsrechnung heißt die Theilung einer Größe nach gegebenen Verhältnissen d. i. in ungleiche Theile, deren Verhältnisse zu einander gegeben sind. Soll z. B. die Größe M nach den Verhältnissen $3 : 4 : 5$ in die Theile A, B, C getheilt werden, so schließt man aus der Proportion der Theile

$$A : B : C = 3 : 4 : 5,$$

daß A eine gewisse Größe (Einheit) 3mal, B dieselbe Größe 4mal, C dieselbe 5mal, also M dieselbe $3 + 4 + 5$ d. i. 12mal enthält. Daher theilt man M in 12 gleiche Theile und nimmt deren 3 für A, 4 für B, 5 für C.

Bei den Aufgaben der Gesellschaftsrechnung kommt in Betracht 1) die zu theilende Größe, 2) die Proportion der Theile, 3) die Summe der Zahlen der Proportion, 4) Division der zu theilenden Größe durch die Summe, 5) Multiplication des Quotienten mit den einzelnen Zahlen der Proportion.

Aufgabe.

9728 Thlr. sollen unter drei Brüder nach Verhältniß ihres Alters (36, 24, 16 Jahr) getheilt werden. Wieviel erhält jeder?

Aufl. Die Theile verhalten sich wie $36 : 24 : 16$ d. i. $9 : 6 : 4$, folglich betragen sie

$$9728 \times \tfrac{9}{19} \text{ Thlr.}, \quad 9728 \times \tfrac{6}{19} \text{ Thlr.}, \quad 9728 \times \tfrac{4}{19} \text{ Thlr.}$$

Ausr. $9728 : 19 = 512$, $512 \times 9 = 4608$
22 $512 \times 6 = 3072$
38 $512 \times 4 = 2048$
9728.

Antw. Die Brüder erhalten 4608, 3072, 2048 Thlr.

Aufgabe.

Vier Personen kaufen ein Loos, wozu A 8 Thlr. 10 Sgr., B 12 Thlr. 25 Sgr., C 6 Thlr. 20 Sgr., D 13 Thlr. giebt. Das Loos

gewinnt 10 000 Thlr., wovon $12\frac{1}{2}$ Proc. die Hauptcasse und $3\frac{1}{3}$ Proc. der Einnehmer abzieht. Wieviel bekommt jeder?

Aufl. Die Lotteriecasse zahlt für das Loos $\frac{10000 \text{ Thlr.} \times 87\frac{1}{2}}{100}$, der Einnehmer zahlt dafür $\frac{10000 \text{ Thlr.} \times 87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3}}{100 \times 100}$ aus. Diese Geldsumme haben die vier Personen nach Verhältniß der Beiträge zu theilen, welche sich verhalten wie

$$250 : 385 : 200 : 390 = 50 : 77 : 40 : 78.$$

Die vier Personen erhalten $\frac{50}{245}$, $\frac{77}{245}$, $\frac{40}{245}$, $\frac{78}{245}$ der ausgezahlten Summe.

Ausr. $87\frac{1}{2} \times 96\frac{2}{3} = 8458\frac{1}{3}$, $8458\frac{1}{3} : 245 = 34\frac{11}{21}$.

A	erhält	$34\frac{11}{21} \times 50 = 1726\frac{4}{21}$	Thlr.
B	"	$34\frac{11}{21} \times 77 = 2658\frac{1}{3}$	"
C	"	$34\frac{11}{21} \times 40 = 1380\frac{20}{21}$	"
D	"	$34\frac{11}{21} \times 78 = 2692\frac{6}{7}$	"
		$8458\frac{1}{3}$	

Aufgabe.

Im Sprengpulver verhalten sich die Massen von Salpeter und Kohle wie 16 zu 5, von Salpeter und Schwefel wie 10 zu 3. Wieviel von diesen Stoffen ist zu 5934 Pfund Sprengpulver nöthig?

Aufl. Auf 1 Pfund Salpeter kommt $\frac{5}{16}$ Pfd. Kohle und $\frac{3}{10}$ Pfd. Schwefel, mithin ist 5934 Pfd. nach den Verhältnissen $1 : \frac{5}{16} : \frac{3}{10} = 80 : 25 : 24$ zu theilen. Das Pulver enthält

$5934 \times \frac{80}{129}$ Pfd. Salpeter,
$5934 \times \frac{25}{129}$ Pfd. Kohle,
$5934 \times \frac{24}{129}$ Pfd. Schwefel.

Ausr. $5934 : 129 = 46$, $46 \times 80 = 3680$ Pfd. Salpeter,
$46 \times 25 = 1150$ " Kohle,
$46 \times 24 = 1104$ " Schwefel,
5934 Pfd. Pulver.

Aufgabe.

Zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung gab A 200 Thlr. auf 4 Monate, B 160 Thlr. auf 6 Monate, C 120 Thlr. auf 8 Monate. Sie gewannen 136 Thlr. Wieviel bekommt jeder davon?

Aufl. Gilt der Anspruch Eines, der 1 Thlr. auf 1 Monat gegeben hätte, als Einheit, so kommen vom Gewinn dem A 200×4, dem B 160×6, dem C 120×8 Einheiten zu, und ihre Ansprüche verhalten sich wie

$$200 \times 4 : 160 \times 6 : 120 \times 8 = 5 : 6 : 6.$$

Daher bekommt A $136 \times \frac{5}{17}$ Thlr., B und C $136 \times \frac{6}{17}$ Thlr.
Nun ist $136 : 17 = 8$, mithin erhält

$$\begin{array}{llr} A & 8 \times 5 = & 40 \text{ Thlr.} \\ B & 8 \times 6 = & 48 \quad " \\ C & 8 \times 6 = & 48 \quad " \\ \hline & & 136 \text{ Thlr.} \end{array}$$

5. Die **Mischungsregel** betrifft die Ermittelung des Verhältnisses, nach welchem zwei Sorten von gegebenem Werthe gemischt werden müssen, damit die Mischung einen gegebenen Werth erhält. Z. B. Aus zwei Sorten Wein, A und B, von denen das Quart 36 und 20 Sgr. kostet, soll eine Mittelsorte M gemischt werden, von der das Quart 30 Sgr. kostet. Man hat in der Mischung

an 1 Quart A 36 — 30 Sgr. d. i. 6 Sgr. Verlust,
an 1 Quart B 30 — 20 Sgr. d. i. 10 Sgr. Gewinn,

folglich

an 10 Quart A 6 . 10 Sgr. Verlust,
an 6 Quart B 10 . 6 Sgr. Gewinn.

Der Verlust an A wird durch den Gewinn an B aufgehoben, wenn man 10 Einheiten A mit 6 Einheiten B mischt, also

$$A : B = 10 : 6 = 5 : 3$$

d. h. $A = \frac{5}{3} B = \frac{5}{8}$ der Mischung, $B = \frac{3}{5} A = \frac{3}{8}$ der Mischung.

Die Mischungsregel lautet demnach: „Bilde die Differenzen der Werthe von der bessern Sorte und der Mischung, von der Mischung und der schlechtern Sorte; mische die bessere Sorte mit der schlechtern nach dem Verhältniß der zweiten Differenz zur ersten Differenz."

Soll aus einer Sorte (A) zu 36 Sgr. durch Zusatz von Wasser (B) eine Sorte zu 30 Sgr. gemischt werden, so ist die erste Differenz 36 — 30 Sgr., die zweite Differenz 30 — 0 Sgr., folglich die Proportion der Bestandtheile

$$A : B = 30 : 6 = 5 : 1$$

d. h. $B = \frac{1}{5} A = \frac{1}{6}$ der Mischung.

Aufgabe.

Aus 14löthigem Silber (A) und 8löthigem Silber (B) soll 12löthiges Silber gemischt werden. Das Silber heißt 14löthig, wenn eine Mark desselben 14 Loth fein Silber (und 2 Loth Kupfer) enthält.

Aufl. Die erste Differenz beträgt 14 — 12 Loth f., die zweite Differenz 12 — 8 Loth f., folglich

$$A : B = 4 : 2 = 2 : 1$$

d. h. $A = 2\,B = \frac{2}{3}$ der Mischung,

$B = \frac{1}{2}\,A = \frac{1}{3}$ der Mischung.

Soll aus 14löthigem Silber (A) durch Zusatz von Kupfer (B) 12löthiges Silber bereitet werden, so ist die erste Differenz 14—12 Loth f., die zweite Differenz 12—0 Loth f., also

$$A : B = 12 : 2 = 6 : 1$$

d. h. $B = \frac{1}{6}\,A = \frac{1}{7}$ der Mischung.

§. 14. Die Decimalbrüche.

In allen Sprachen sind die Zahlwörter nach dem Decimalsystem gebildet, so daß zehn Einheiten in einen Zehner, zehn Zehner in ein Hundert, zehn Hunderte in ein Tausend zusammengefaßt werden; die neueren Sprachen vereinigen dann tausend Tausende in eine Million, million Millionen in eine Billion, u. s. w. Bei der Bezeichnung der Zahlen gebraucht man allgemein nach indischer Erfindung, die zuerst durch die Araber weiter verbreitet wurde, dieselben zehn Ziffern, welche für sich Einer bedeuten, auch zur Angabe höherer Einheiten und macht die höhern Einheiten durch ihre Stellung vor die Einer kenntlich, so daß die Zehner die 1te, die Hunderte die 2te, die Tausende die 3te, . . , die Millionen die 6te, . . , die Billionen die 12te, . . Stelle vor den Einern einnehmen. Ebenso werden zur Bezeichnung von niedern Einheiten (Brüchen) die Stellen nach den Einern angewendet*).

Die Einheiten einer bestimmten Stelle sind im Decimalsystem 10mal so groß als die Einheiten der (rechts) folgenden, z. B. auf die Tausende folgen Hunderte, auf die Hunderte Zehner, auf die Zehner Einer. Auf die Einer folgen daher in der 1ten Stelle Zehntel, in der 2ten Stelle Hundertel, in der 3ten Stelle Tausendtel, in der 6ten Milliontel, in der 12ten Billiontel, u. s. f. Um die Einer als solche anzuzeigen, macht man nach denselben ein Komma (Punkt, das Einerzeichen). Daher bedeutet 426,357..

---

*) Die Rechnung mit den indischen (arabischen) Ziffern (Algorithmus) ist im 9. Jahrhundert im Orient (Mohammed ben Musa Alcharezmi), im 13. Jahrhundert in Europa bekannter worden. Das Wort Algorithmus wurde später für jede Art von Rechnungs-Operationen gebraucht. Regiomontan vertauschte um 1464 die bei den griechischen Mathematikern und deren Nachfolgern gebräuchlichen Sexagesimalbrüche mit den bequemeren Decimalbrüchen. In allgemeineren Gebrauch kamen die Decimalbrüche seit der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts (Recorde 1557, Stevin 1585). Die Abkürzung der Decimalbruchrechnung hat Keppler 1623 durch Prätorius (von Altdorf) gelernt. Vergl. Grunert Archiv 24 p. 296.

4 Hunderte + 2 Zehner + 6 Einer + 3 Zehntel
+ 5 Hundertel + 7 Tausendtel + . .

Gleichwie nun 4 Hunderte = 40 Zehner = 400 Einer, 2 Zehner = 20 Einer, also die ganze Zahl = 426 Einer, so sind 3 Zehntel = 30 Hundertel = 300 Tausendtel, 5 Hundertel = 50 Tausendtel, also die gebrochene Zahl = 357 Tausendtel. Man kann aber auch die 426 Einer zu 426 000 Tausendtel machen und erhält eingerichtet 426 357 Tausendtel. Daher

$$426{,}357 = 426\,\tfrac{357}{1000} = \tfrac{426357}{1000}.$$

1. Brüche, deren Nenner Einheiten des Decimalsystems, 10, 100, 1000, . . . (Potenzen der 10) sind, heißen *Decimalbrüche*. Sie werden ohne Nenner geschrieben, indem man die Zehntel von den Einern durch ein Komma trennt. Brüche mit andern Nennern heißen *gemeine* Brüche.

2. Um eine gemischte Decimalzahl zu *lesen*, liest man entweder (zerlegt) nächst der ganzen Zahl einen Bruch, dessen Zähler die nach dem Komma stehende Zahl und dessen Nenner der Nenner der letzten Stelle ist, oder (eingerichtet) einen Bruch, dessen Zähler die Decimalzahl ohne das Komma, und dessen Nenner der Nenner der letzten Stelle ist.

Zerlegen und *Einrichten* geschieht bei Decimalbrüchen ohne die Rechnung, welche bei gemeinen Brüchen erfordert wird (§. 8, 1).

3. Da die Bruchstellen nach der Einerstelle beurtheilt werden, so kann die Letztere nie fehlen. Ist der Decimalbruch echt, so muß er mit 0 Einern beginnen; z. B.

7 Zehntel = 0,7.
28 Hundertel = 2 Zehntel + 8 Hundertel = 0,28.
9 Hundertel = 0 Zehntel + 9 Hundertel = 0,09.
307 Tausendtel = 3 Zehntel + 0 Hundertel + 7 Tausendtel = 0,307.
1 Tausendtel = 0,001.
1 Milliontel = 0,000 001.
1847 Hunderttausendtel = 0,018 47 u. s. f.

Um einen Decimalbruch zu *schreiben*, schreibt man seinen Zähler (und vor denselben, wenn nöthig noch Nullen, bis soviel Ziffern dastehen, als der Nenner hat) und setzt das Komma so, daß die letzte Stelle den gegebenen Nenner hat.

$$\tfrac{1835}{10} = 183{,}5 \quad \tfrac{1835}{100} = 18{,}35 \text{ u. s. f.}$$

4. Da 7 Zehntel = 70 Hundertel = 700 Tausendtel u. s. f.

und 3 Einer = 30 Zehntel = 300 Hundertel u. s. f., so kann man an einen Decimalbruch oder an eine ganze Zahl, nachdem man das Komma nach der Einerstelle gemacht hat, Nullen beliebig anhängen oder vom Ende weglassen.

$$0{,}7 = 0{,}70 = 0{,}700\ldots$$
$$3 = 3{,}0 = 3{,}00\ldots$$
$$1800 : 100 = 18{,}00 = 18$$
$$1800 : 1000 = 1{,}800 = 1{,}8.$$
$$1800 : 1000000 = 0{,}001\,800 = 0{,}0018.$$

Die Umformung (§. 8, 3) von Decimalbrüchen erfordert keine Rechnung, sobald man nicht zu gemeinen Brüchen übergeht.

Nach dem Muster des Decimalsystems mit der Grundzahl 10 kann man auch auf andere Grundzahlen Zahlsysteme bauen, z. B. ein Duodecimalsystem auf die Grundzahl 12. Dazu braucht man noch 2 Ziffern für zehn und elf, z. B. z, e, und bildet aus 12 Einern 1 Zwölfer (bez. 10), aus 12 Zwölfern 1 Hundertvierundvierziger (bez. 100), aus 12 Hundertvierundvierzigern 1 Tausendsiebenhundertachtundzwanziger (bez. 1000) u. s. w. Auf die Einer folgen dann rechts Duodecimalbrüche, Zwölftel in der ersten, Hundertundvierundvierzigstel in der zweiten, Tausendsiebenhundertachtundzwanzigstel in der dritten Stelle, u. s. w. Daher bedeutet die Duodecimalzahl 7z08,5e4 folgende Decimalzahl:

7×1728	12096
$+\ 10 \times 144$	1440
$+\ 0 \times 12$	0
$+\ 8 \times 1$	8
$+\ 5 \times \frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
$+\ 11 \times \frac{1}{144}$	$\frac{11}{144}$
$+\ 4 \times \frac{1}{1728}$	$\frac{1}{432}$
	$13544\frac{107}{216}$

Praktische Bedeutung können andere Zahlsysteme, als das Decimalsystem, nicht erlangen, weil die Zahlwörter der Cultursprachen auf das Decimalsystem gegründet sind, und in einer gegebenen Sprache nicht willkürlich neue Wörter gebildet werden können.

§. 15. Addition und Subtraction der Decimalbrüche.

1. Wie man Einer zu den Einern, Zehner zu den Zehnern u. s. f. bei ganzen Zahlen addirt, so addirt man Zehntel zu den Zehnteln, Hundertel zu den Hunderteln u. s. f., indem man von der niedrigsten Stelle anfängt; z. B.

$$\begin{array}{r} 27{,}568 \\ +\ 5{,}874 \\ \hline 33{,}442 \end{array}$$

8 + 4 Tausendtel	=	12 Tausendtel	=	1 Hundertel	+	2 Tausendtel,
1 + 6 + 7 Hundertel	=	14 Hundertel	=	1 Zehntel	+	4 Hundertel,
1 + 5 + 8 Zehntel	=	14 Zehntel	=	1 Einer	+	4 Zehntel,
1 + 7 + 5 Einer	=	13 Einer	=	1 Zehner	+	3 Einer,
1 + 2 Zehner	=	3 Zehner.				

$$\begin{array}{r} 35{,}894 \\ +\ \underline{0{,}1307} \\ 36{,}0247 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27{,}568 \\ +\ \underline{1{,}232} \\ 28{,}8 \end{array}$$

Die Zehntausendtel des ersten Beispiels bleiben ungeändert; die Nullen am Ende des letztern können wegbleiben.

2. Eben so subtrahirt man Zehntel von Zehnteln, Hundertel von Hunderteln u. s. w., indem man, wenn nöthig, 1 Einer = 10 Zehntel = 100 Hundertel . ., oder 1 Zehntel = 10 Hundertel . . zu Hülfe nimmt (borgt); z. B.

$$\begin{array}{r} 35{,}0305 \\ -\ \underline{6{,}8941} \\ 28{,}1364 \end{array}$$

5 — 1 Zehntausendtel	=	4 Zehntausendtel,
10 — 4 Tausendtel	=	6 Tausendtel,
12 — 9 Hundertel	=	3 Hundertel,
9 — 8 Zehntel	=	1 Zehntel,
14 — 6 Einer	=	8 Einer
2 Zehner.		

$$\begin{array}{r} 1{,}534 \\ -\ \underline{0{,}734} \\ 0{,}8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ -\ \underline{0{,}794} \\ 0{,}206 \end{array}$$

Die Nullen am Ende können wegbleiben. Statt 1 hat man 1,000 zu nehmen.

Bei diesen Rechnungen zeigen die Decimalbrüche besondern Vortheil vor den gemeinen Brüchen.

§. 16. Multiplication der Decimalbrüche.

1. Um einen Decimalbruch mit 10, 100, 1000, . . zu multipliciren, rückt man das Komma 1, 2, 3, . . Stellen weiter rechts, z. B.

$7{,}23 \times 10 = 72{,}3 \qquad 11{,}5 \times 10 = 115 \qquad 0{,}007 \times 10 = 0{,}07$

$1{,}0073 \times 100 = 100{,}73 \qquad 0{,}0067 \times 100 = 0{,}67$

$0{,}723 \times 1000 = 723 \qquad 0{,}723 \times 10\,000 = 7230.$

Denn indem man mit 10 multiplicirt, werden aus Zehnern Hunderte, aus Einern Zehner, aus Zehnteln Einer, aus Hunderteln Zehntel, u. s. w. und die Einheiten jeder Stelle gehen in Einheiten der nächst höhern

Stelle über. Indem man mit 100 multiplicirt, gehen die Einheiten jeder Stelle in Einheiten der 2ten höhern Stelle über u. s. f.

Umgekehrt: um einen Decimalbruch durch 10, 100, 1000, . . zu dividiren, rückt man das Komma 1, 2, 3, . . Stellen weiter links.

$$17{,}23 : 10 = 1{,}723 \qquad 7{,}23 : 10 = 0{,}723$$
$$17{,}23 : 100 = 0{,}1723 \qquad 17{,}23 : 1000 = 0{,}017\,23$$
$$0{,}03 : 10\,000 = 0{,}000\,003.$$

Diese Regeln folgen auch aus den allgemeinen Regeln §. 10.

2. Um einen Decimalbruch mit einem Decimalbruch zu multipliciren, multiplicirt man denselben mit den einzelnen Stellen des Multiplicator, von der höchsten bis zur letzten, macht in der ersten Zeile des Products das Komma, rückt jede folgende Zeile des Products eine Stelle weiter rechts hinaus, und addirt die einzelnen Producte.

Multiplicirt man zuerst mit Einern, so behält das Komma den Platz, den es im Multiplicandus hatte, z. B.

$$\frac{7{,}543 \,.\, 6}{45{,}258} \quad \text{weil } 7{,}543 \,.\, 6 = \frac{7543 \,.\, 6}{1000}$$

Multiplicirt man zuerst mit Zehnern, Hunderten, . ., so setzt man das Komma 1, 2, . . Stellen weiter rechts, z. B.

$$\frac{7{,}543}{301{,}72} \,.\, 40 \qquad \frac{7{,}543}{6034{,}4} \,.\, 800 \qquad \frac{0{,}5763}{1152{,}6} \,.\, 2000$$

weil 7,543 . 40 = 75,43 . 4, u. s. w.

Multiplicirt man zuerst mit Zehnteln, Hunderteln, . . . so setzt man das Komma 1, 2, . . Stellen weiter links, z. B.

$$\frac{7{,}543}{1{,}5086} \,.\, 0{,}2 \qquad \frac{7{,}543}{0{,}37715} \,.\, 0{,}05 \qquad \frac{7{,}543}{0{,}052\,801} \,.\, 0{,}007$$

weil 7,543 . 0,2 = 0,7543 . 2, u. s. w.

Multiplicirt man ferner mit den auf die höchste folgenden Stellen des Multiplicator, so hat man jede neue Zeile des Products eine Stelle weiter rechts auszurücken. Z. B.

```
 7,543 . 46,25        46,25 . 7,543
------               ------
301,72               323,75
  45 258              23 125
   1 5086              1 8500
     37715               13875
---------            ---------
348,86375            348,86375
```

$$
\begin{array}{r}
62\,500 \,.\, 0{,}001\,28 = \underline{625 \,.\, 0{,}128} \\
62{,}5 \\
12\,50 \\
\underline{5\,000} \\
80
\end{array}
$$

Man nimmt 625 . 100 statt 62 500, und multiplicirt den Bruch mit 100. Die Nullen am Ende bleiben weg.

$$15{,}743 \,.\, 322{,}69 = 1574{,}3 \,.\, 3{,}2269.$$

Man kann den einen Factor durch 100 dividiren, wenn man den andern mit 100 multiplicirt.

Man kann nach der allgemeinen Regel §. 12, 2 die Zähler (ganze Zahlen) multipliciren und ihr Product durch das Product der Nenner dividiren, d. h. soviel Stellen durch das Komma vom Product der Zähler rechts abschneiden, als Bruchstellen in beiden Factoren zusammengenommen vorhanden sind. Hat z. B. der eine Factor 3, der andere 4 Bruchstellen, so hat das ungekürzte Product 3 + 4 d. i. 7 Bruchstellen; denn der Nenner 1000 mit dem Nenner 10 000 multiplicirt giebt den Nenner 10 000 000, welcher der 7ten Bruchstelle zukommt. Dieses Verfahren ist aber für das praktische Rechnen nicht zu empfehlen, weil es bei der abgekürzten Multiplication (§. 18) nicht ohne Weiteres anwendbar ist.

§. 17. Division der Decimalbrüche.

1. Ist der Divisor eine ganze Zahl, so findet man

die ganze Zahl des Quotienten, indem man die ganze Zahl des Dividendus dividirt;

die Zehntel des Quotienten, indem man die Zehntel des Dividendus mit Einschluß des Einerrestes dividirt;

die Hundertel des Quotienten, indem man die Hundertel des Dividendus mit Einschluß des Zehntelrestes dividirt, u. s. w. Fehlen Bruchstellen im Dividendus zur Fortsetzung der Division, so hängt man Nullen an denselben (§. 14, 4). Z. B.

```
326,74 : 28 = 11,6692
28
 46       11,6692 . 28
 28       233,384
 187       93 3536
 168            24
  194     326,74
  168
   260
   252
     80
     56
     24 . . .
```

```
0,053 : 9 = 0,00588
 0
  5
  53
   80
   80
    8 . . .

5 : 7 = 0,714 2857
50
 10
  30
   20
    60
     40
      50
       1 . . .
```

Wie weit man die Division, wenn sie nicht aufgeht, fortzusetzen hat, hängt von der Natur der Aufgabe ab. Man benutzt den Rest, um den berechneten Quotienten so genau als möglich, den Fehler desselben so klein als möglich zu machen (vergl. §. 3, 4). Genügt es z. B., den Quotienten von 326,74 : 28 bis auf Zehntausendtel zu berechnen, und darf man die Hunderttausendtel desselben als unmerklich klein vernachlässigen, so ist als Quotient 11,6693 und nicht 11,6692 anzugeben, weil bei der letzten Division 80 : 28 näher 3 als 2 ist. Der Fehler des Quotienten 11,6693 beträgt weniger als $\frac{1}{2}$ Zehntausendtel und ist so klein als möglich, wenn man auf die Angabe kleinerer Bruchtheile verzichtet. Denn indem man 80 : 28 = 3 nimmt, vernachlässigt man $\frac{4}{28}$ (d. i. weniger als $\frac{1}{2}$) Zehntausendtel, während man, indem man 80 : 28 = 2 nimmt, $\frac{24}{28}$ (d. i. mehr als $\frac{1}{2}$) Zehntausendtel vernachlässigen würde.

Eben so ist 0,053 : 9 genauer 0,00589 als 0,00588. Dagegen ist 5 : 7 genauer 0,7142857 als 0,7142858. *Man vermehrt die letzte Stelle des unvollständigen Quotienten um 1, wenn der Rest mehr als die Hälfte des Divisor ist.* Der Fehler des Quotienten wird dann nicht mehr als $\frac{1}{2}$ Einheit seiner letzten Stelle betragen.

2. Um durch einen Decimalbruch zu dividiren, multiplicirt man mit dem Nenner (§. 16, 1) und dividirt das Product durch den Zähler, wie bei einem gemeinen Bruche (§. 11, 3). Z. B.

17,4832 : 3,125 = 17,4832 . 1000 : 3125
= 17483,2 : 3125 = 5,59..
15625
18582
15625
29570
28125
1445..

0,043 81 : 0,35 = 4,381 : 35
0,09 : 0,3845 = 900 : 3845.

Statt 0,09 kann man 0,0900 setzen. Nun sind 3845 Zehntausendtel in 900 Zehntausendteln sovielmal enthalten als 3845 in 900. Also kann man das Komma weglassen, nachdem Dividendus und Divisor gleichnamig gemacht sind. Vergl. §. 11, 3.

3. Sind Dividendus und Divisor (abgesehen vom Komma) relative Primzahlen (§. 7, 3), und ist der Divisor 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . (eine Potenz der 2) oder 5, 25, 125, 625, 3125, . . (eine Potenz der 5) oder nur aus diesen Zahlen zusammengesetzt, wie 20, 40, 80, 160, 320, 640, . . , 50, 200, 400, 800, . . , 250, 500, 2000, 4000, . . , 1250, 2500, 5000, 20 000, . . u. s. w., so geht die Division auf und der Quotient ist ein vollständiger (endlicher) Decimalbruch. Die Division geht auf, wenn z. B.

Divisor 20 Rest 13, weil $\frac{13}{20} = \frac{13 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 0,65$

„ 125 „ 72 „ $\frac{72}{125} = \frac{72 \cdot 8}{125 \cdot 8} = 0,576$

„ 36 „ 27 „ $\frac{27}{36} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = 0,75$

„ 56 „ 35 „ $\frac{35}{56} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = 0,625.$

In der That findet man

27,53 : 20 = 1,3765.
75
153
130
100
0

607,2 : 125 = 4,8576.
607
500
1072
1000
720
625
950
875
750
750
0

18387 : 36 = 510,75.
180
38
36
270
252
180
180
0

35 : 56 = 0,625
350
336
140
112
280
280
0

4. Wenn der Divisor prim zum Dividendus (Rest) und durch eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl theilbar ist, so geht die Division nicht auf, und der Quotient ist ein **periodischer unendlicher Decimalbruch**, den man so abbricht, daß der Fehler die erforderliche Kleinheit hat.

Ist z. B. der Divisor 7 und der Rest 3, so kann der zur letzten Stelle des Quotienten gehörige Bruch $\frac{3}{7}$ nicht genau in einen Decimalbruch verwandelt werden, weil 7 nicht in 10, 100, 1000, . . aufgeht (§. 8, 3). Ist der Divisor 12 und der Rest 5, so kann $\frac{5}{12}$ zwar auf $\frac{125}{300}$ gebracht, aber $\frac{125}{300}$ nicht genau in einen Decimalbruch verwandelt werden, weil 300 in 1000, 10000, . . ebensowenig aufgeht als 3 in 10. Daher können die Divisionen 3,00.. : 7, 5,00.. : 12 u. dergl. nicht aufgehen.

Bei dem Divisor 7 können nur die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 erscheinen. Hat man daher bis zur 6ten Division verschiedene Reste erhalten, so bleibt bei der 6ten Division ein Rest, welcher schon einmal mit einer Null versehen und dividirt worden ist. Man findet also denselben Quotienten und Rest wie früher, denen die übrigen Quotienten und Reste in unaufhörlicher Wiederkehr folgen. Die sich wiederholende Reihe der einzelnen Quotienten, deren Anzahl kleiner ist als der Divisor, heißt die **Periode** des unendlichen Decimalbruchs. Z. B.

3 : 7 = 0,428571 428571 428... bezeichnet 0,[428571]
30
20
60
40
50
10
3...

31 : 33 = 0,[93]
310
297
130
99
31...

19 : 111 = 0,[171]
190
111
790
777
130
111
19

7 : 9 = 0,[7]
70
7...

1 : 15 = 0,0[6]
10
100
10...

1 : 369 = [0,002 71]
10
100
1000
738
2620
2583
370
369
1...

119 : 220 = 0,54[09]
1190
1100
900
880
2000
1980
20...

Die Periode beginnt mit der Stelle, zu deren Berechnung zuerst eine Null dem Rest angehängt wurde, außer wenn der Divisor durch 2 oder 5 theilbar ist.

5. Jeder gemeine Bruch kann entweder in einen endlichen oder in einen periodischen unendlichen Decimalbruch verwandelt werden. Denn ein Bruch ist der Quotient des Zählers durch den Nenner, z. B. $\frac{7}{12} = 7 : 12$, u. s. w.

Umgekehrt: jeder periodische unendliche Decimalbruch ist einem bestimmbaren gemeinen Bruche gleich. Man findet nämlich

$$\frac{1}{9} = 0,[1] \quad \frac{1}{99} = 0,[01] \quad \frac{1}{999} = 0,[001]$$
$$\frac{1}{9999} = 0,[0001] \quad \frac{1}{99999} = 0,[000\,01] \text{ u. s. f.}$$

folglich ist

$$0,[6] = 0,[1] \,.\, 6 = \tfrac{6}{9} = \tfrac{2}{3}.$$
$$0,[36] = 0,[01] \,.\, 36 = \tfrac{36}{99} = \tfrac{4}{11}.$$
$$0,[270] = 0,[001] \,.\, 270 = \tfrac{270}{999} = \tfrac{10}{37}.$$
$$0,0[4] = 0,[4] : 10 = \tfrac{4}{9} : 10 = \tfrac{2}{45}.$$
$$0,8[3] = 8,[3] : 10 = 8\tfrac{1}{3} : 10 = \tfrac{5}{6}.$$
$$0,29[74] = 29,[74] : 100 = 29\tfrac{74}{99} : 100 = \tfrac{589}{1980}.$$

§. 18. Rechnung mit unvollständigen Decimalzahlen.

Eine Messung kann nicht vollkommen genau, sondern nur mit einer durch die Beschaffenheit der Meßinstrumente und der menschlichen Sinne begrenzten Genauigkeit ausgeführt werden. Die durch Messung gefundenen Zahlen sind daher nur bis zu einer bestimmten Grenze abwärts verbürgt, und müssen als mehr oder weniger unvollständig (fehlerhaft) betrachtet werden. Auch sind eine große Klasse durch Rechnung bestimm-

ter Zahlen ihrer Natur nach Summen von unendlich vielen Gliedern, z. B. Wurzeln, Logarithmen, Sinus, die Ludolfsche Zahl, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen u. s. w., und können folglich nur unvollständig angegeben werden, wenn auch so, daß in jedem gegebenen Falle der Fehler unbeträchtlich ist. Es ist nothwendig zu wissen, wieweit die durch Rechnung mit unvollständigen Zahlen gefundenen Zahlen verbürgt sind.

Bei jeder unvollständigen Zahl wird angenommen, daß der Fehler weniger beträgt, als $\frac{1}{2}$ Einheit der letzten angegebenen Stelle. Unter Voraussetzung der Unvollständigkeit bedeutet demnach

35	eine	Zahl	zwischen	34,5	und	35,5
1,427	"	"	"	1,4265	"	1,4275
0,4700	"	"	"	0,469 95	"	0,470 05
20 734 Tausend	"	"	"	20 733 500	"	20 734 500
$329\frac{2}{7}$	"	"	"	$329\frac{3}{14}$	"	$329\frac{5}{14}$.

Wenn eine Zahl genauer gegeben ist, als es für einen bestimmten Zweck nöthig ist, so kann man sie verkürzen d. h. die Einheiten niederer Stellen weglassen. Dabei vermehrt man die zuletzt behaltene Stelle um 1, wenn in der folgenden Stelle mehr als 5 steht. Z. B.

38,5764 ist näher 38,5760 als 38,5770, daher abgekürzt 38,576. Dieselbe Zahl ist näher 38,60 als 38,50, daher noch mehr abgekürzt 38,6.

Für 27 538 936 schreibt man 27,539 Millionen, wenn nur noch die Tausende in Betracht kommen.

0,46996 wird abgekürzt 0,4700, wenn nur noch die Zehntausendtel in Betracht kommen. Die Nullen am Ende sind in diesem Falle nicht ohne Bedeutung.

Unter der Genauigkeit einer Zahlangabe hat man das Verhältniß der Zahl zu ihrem Fehler, also zu einer Einheit der letzten angegebenen Stelle, welche nicht mehr fehlerfrei ist, zu verstehen. Z. B. die Angabe 86,43 hat die Genauigkeit 86,43 : 0,01 = 8643 d. h. von 8643 Einheiten ist nur eine nicht ganz verbürgt. Die Angaben 84,63 und 0,008 643 haben einerlei Genauigkeit, weil

$$86{,}43 : 0{,}01 = 0{,}008\,643 : 0{,}000\,001 = 8643.$$

Die Größe, von der man weiß, daß sie 8192 Fuß beträgt, ist genauer bekannt, als die Größe, von der man weiß, daß sie 0,3024 Zoll beträgt, weil

$$8192 : 1 = 8192 \text{ und } 0{,}3024 : 0{,}0001 = 3024.$$

Am meisten Genauigkeit besitzen die astronomischen Angaben; bei den

chemischen und physikalischen Zahlen hat man die gleiche Genauigkeit nur in seltenen Fällen erreicht.

1. Addition und Subtraction.

$$\begin{array}{r} 7{,}329 \\ +\ 3{,}487 \\ \hline 10{,}81_{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7{,}329 \\ -\ 3{,}842 \\ \hline 3{,}48_{7} \end{array}$$

Hier kann der Fehler der Summe und Differenz ein halbes Tausendtel übersteigen. Bei mehreren Gliedern würde die letzte Stelle immer unsicherer werden.

$$\begin{array}{r} 0{,}013\,74 \\ +\ 9{,}256 \\ \hline 9{,}270 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}243 \\ -\ 0{,}0148 \\ \hline 9{,}228 \end{array}$$

Die Glieder werden sämmtlich bei derselben Stelle abgebrochen; schon die Zehntausendtel der Summe sind unbestimmbar, weil das eine Glied nicht bis dahin gegeben ist. Man nimmt daher 0,014 statt 0,01374.

2. Multiplication.

Ein Product kann nicht mit größerer Genauigkeit angegeben werden, als das Product des minder genauen Factors mit der höchsten Stelle des genaueren Factors. Man nimmt daher den ungenauern Factor zum Multiplicandus, den genaueren Factor zum Multiplicator, und berechnet die erste Zeile des Products wie gewöhnlich (§. 16, 2). Dann wird der Multiplicandus mehr und mehr verkürzt, und von dem rechts Auszurückenden nur dasjenige in Rechnung gezogen, was auf die letzte Stelle der ersten Zeile Einfluß hat. Z. B.

$$\begin{array}{r} 5{,}392\ .\ 7{,}386 \\ \hline 37{,}744\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ 1\,618.\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ 431\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ 32\phantom{\ .\ 7{,}386} \\ \hline 39{,}82_{5}\phantom{\ .\ 7{,}386} \end{array}$$

In der zweiten Zeile ist 2 . 3 = 6 auszurücken, also wird oben 2 gestrichen, und 1 zu 539 . 3 addirt, weil 6 näher 10 als 0.

In der dritten Zeile ist noch 9 . 8 = 72 auszurücken, also oben 9 zu streichen, und 7 zu 53 . 8 zu addiren, weil 72 näher 70 als 80.

In der vierten Zeile ist noch 3 . 6 = 18 auszurücken, also oben 3 zu streichen, und 2 zu 5 . 6 zu addiren, weil 18 näher 20 als 10.

Die letzte Stelle des Products wird unsicher, weil ihr möglicher

Fehler die möglichen Fehler der letzten Stellen der einzelnen Zeilen in sich schließt.

```
0,0267 . 76,384          357 600 . 18 470
1,869                  = 1,847 . 3,576 Tauf. Mill.
  160                    5,541
    8                      924
    2                      129
2,039                       11
                         6,605  Tausendmillionen.
```

3. **Division.**

Die höchste Stelle des Quotienten wird wie gewöhnlich (§. 17, 2) berechnet, die fernere Division abgekürzt.

a. Ist der Divisor genauer als der Dividendus, so wird der Divisor soweit verkürzt, als es zur Subtraction seines Products mit der gefundenen Stelle des Quotienten vom gegebenen Dividendus nöthig ist. Zur Fortsetzung der Division wird nicht der Rest verlängert, sondern der Divisor verkürzt. Bei jeder Multiplication wird der Einfluß der zuletzt gestrichenen Stelle des Divisor in Betracht gezogen. Z. B.

```
  0,01034 : 94,65
= 1,034 : 9465 = 0,000 1092
  10
  103
  1034
   947
    87
    85
     2
     2
```

An 1034 kann 0 nicht angehängt werden; man streicht 5 am Divisor und subtrahirt 1 + 946 . 1, weil 5 näher 10 als 0.

An 87 kann 0 nicht angehängt werden; man streicht 6 am Divisor und subtrahirt 0; man streicht ferner 4 am Divisor und subtrahirt 4 + 9 . 9, weil 4 . 9 näher 40 als 30 ist.

Die letzte Stelle 2 des Quotienten (20 : 9) ist unsicher wegen des n glichen Fehlers in der letzten Stelle des Restes.

b. Ist der Divisor ungenauer als der Dividendus, so wird der I videndus soweit verkürzt, als es zur Subtraction des Products aus d gefundenen Stelle des Quotienten mit dem Divisor nöthig ist. Die I vision wird fortgesetzt wie vorhin. Z. B.

658,37 : 4,281
$= 65837_0$: 4281 = 153,8
4281
2303
2141
162
128
34
34

Der Dividendus ist näher $658\,4_{00}$ als $658\,3_{00}$, also der erste Rest 2303. Für die zweite Division wird am Divisor 1, am Rest 7 gestrichen. Für die dritte Division wird am Divisor 8, am Rest 0 gestrichen und im Quotienten das Komma gemacht, nachdem man die Einer des Dividendus dividirt hat. Für die folgende Division wird am Divisor 2 gestrichen.

1 : 45,78
= 100 : 4578 = 0,021 84
1000
10000
9156
844
458
386
366
20
18

4865 : 0,273
$= 4865_{000}$: 273 = 179_{00}
273 = 17,9 Tausd.
214
191
23
24

Anwendungen.

1) 6 Thlr. 6 Sgr. $9\frac{4}{7}$ Pf. als Decimalbruch eines Thlr. bis auf 0,01 Pf. genau anzugeben.

$\frac{4}{7}$ Pf. = 0,57 Pf.
6 Sgr. $9\frac{4}{7}$ Pf. = 81,57 : 360 Thlr.
8,157 : 36 = 0,2266. 6 Thlr. 6 Sgr. $9\frac{4}{7}$ Pf. = 6,2266 Thlr.
72
95
72
237
216
21
22

Umgekehrt 0,2266 Thlr. = 0,2266 . 30
6,798 Sgr.
0,798 Sgr. = 0,798 . 12
$9,57_6$ Pf.
Also 0,2266 Thlr. = 6 Sgr. $9,57_6$ Pf.

2) Das (mittlere tropische) Jahr hat 365,242 22 (mittlere Sonnen-) Tage. Es sollen die Stunden, Minuten, Sekunden angegeben werden.

0,242 22 Tage = 0,242 22 . 24
5,8133 Stunden.
0,8133 Stunden = 0,8133 . 60
48,798 Minuten.
0,798 Minuten = 0,798 . 60
47,8$_8$ Sekunden.

1 Jahr = 365 Tage 5 Stunden 48 Min. 47,9 Sek.

3) 7,643 mit $\frac{5}{12}$ zu multipliciren, oder durch $\frac{5}{12}$ zu dividiren. Entweder multiplicirt man mit 5 und dividirt das Product durch 12 (§. 11, 1), oder man multiplicirt statt mit $\frac{5}{12}$ mit dem gleichgeltenden Decimalbruch von solcher Genauigkeit wie 7,643.

7,643 . 5
38,215 : 12 = 3,184$_6$
2 2
1 01
55

7,643 . 0.416 67
3,0572
764
458
46
5
3,184$_5$

Um durch $\frac{5}{12}$ zu dividiren, multiplicirt man mit 12 und dividirt das Product durch 5 (§. 11, 3), oder man dividirt durch den gleichgeltenden Decimalbruch.

7,643 . 12
91 72$_6$: 5 = 18,34$_5$

7,643 : 0,416 67
= 76 43$_{00}$: 416 67 = 18,34$_4$
41 67
34 76
33 33
1 43
1 25
18
16

4) 7,8649 + 9$\frac{27}{38}$. Man kann $\frac{27}{38}$ nur dann unter die Hundertel abwärts entwickeln, wenn die Zahl 9$\frac{27}{38}$ hinreichende Genauigkeit besitzt.

```
                  9
27  : 38 = 0,7105
270      + 7,8649
266        17,5754
 40
 38
  200
  190
   10
```

Um die Bruchreihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \ldots$ bis auf 0,000 001 genau zu summiren, bemerke man, daß $\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} : 3$, $\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2.3} : 4$, u. s. f. (§. 10, 2). Die einzelnen Brüche müssen eine Stelle unter die vorgeschriebene Grenze entwickelt werden, weil die letzte Stelle der Summe durch die Addition unsicher wird.

0,5	:	3
0,166 6667	:	4
0,041 6667	:	5
0,008 3333	:	6
0,001 3889	:	7
0,000 1984	:	8
0,000 0248	:	9
0,000 0028	:	10
0,000 0003		
0,718 282		

5) Jemand hat in 3, 5, 7 Jahren jedesmal 560 Thlr. zu bezahlen, und will sofort mit $5\frac{1}{2}$ auf Hundert jährigem Disconto seiner Schuld sich entledigen. Statt

$100 + 3 . 5\frac{1}{2}$ d. i. $116\frac{1}{2}$ Thlr. vom 1. Capital werden 100 Thlr. gezahlt.
$100 + 5 . 5\frac{1}{2}$ „ „ $127\frac{1}{2}$ „ „ 2. „ „ 100 „ „
$100 + 7 . 5\frac{1}{2}$ „ „ $138\frac{1}{2}$ „ „ 3. „ „ 100 „ „

Daher sind $\frac{100}{116\frac{1}{2}} + \frac{100}{127\frac{1}{2}} + \frac{100}{138\frac{1}{2}}$ des Capitals (560 Thlr.) zu entrichten.

```
100 : 116½ = 1000 : 1165             = 0,85837
             10000        100 : 127½ = 0,78432
              9320        100 : 138½ = 0,72202
              ----                     -------
              6800                     2,36471 . 560
              5825                     -------
              ----                     1182,355
               975                      141 883
               932                     --------
               ---                     1324,238
                43
                35
                --
                 8
```

Die Schuld wird sofort mit 1324 Thlr. 7,1 Sgr. abgetragen.

6) Wenn 131 engl. Meilen = 28 preuß. Meilen, so ist 1 engl. M. = $\frac{28}{131}$ pr. M., 1 pr. M. = $\frac{131}{28}$ engl. M.

```
28 : 131 = 0,21            131 : 28 = 4,7
262                        112
---                        ---
 18                         19
 13                         20
```

Ohne größere Genauigkeit der gegebenen Zahlen kann man die Decimalbrüche nicht weiter sicher berechnen.

Wenn 3,186 preuß. Fuß = 1 Meter, so ist 1 pr. Fuß = 1 : 3,186 = 0,3139 Meter.

```
1 : 3,186 = 1000 : 3186 = 0,3139
            10000
             9558
            -----
              442
              319
              ---
              123
               95
               --
               28
               28
```

7) Aus den Angaben: 1 preuß. Cubikzoll Wasser wiegt $\frac{1}{9}^1$ preuß. Loth alten Stils, 1 Cubikcentimeter davon wiegt 1 Gramm, soll das Verhältniß von Loth und Gramm berechnet werden.

1 preuß. Fuß = 0,3139 Meter = 31,39 Centimeter

$$1 \text{ preuß. Zoll} = \frac{3\;1{,}9}{12} \text{ Centimeter}$$

$$1 \text{ preuß. Cub. Z.} = \frac{31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 31{,}39}{12 \cdot 12 \cdot 12} \text{ Cub. Centim.}$$

daher ist

$$\tfrac{11}{9} \text{ preuß. Loth} = \frac{31{,}39 \cdot 31{,}39 \cdot 31{,}39}{12 \cdot 12 \cdot 12} \text{ Gramm.}$$

$$1 \text{ preuß. Loth} = \frac{31{,}39 \,.\, 31{,}39 \,.\, 31{,}39 \,.\, 9}{12 \,.\, 12 \,.\, 12 \,.\, 11} \text{ Gramm.}$$

```
31,39 : 12 = 2,616 . 2,616     6,844 . 2,616
 73          5,232            13,688
  19         1 570             4 106
   7            26                68
                16                41
             6,844            17,903

        17,903 . 9
       161,13  : 11 = 14,65.
        51
         7 1
          53
```

Ein preuß. Loth beträgt 14,65 Gramm, vorausgesetzt, daß die Zahl $\frac{11}{9}$ hinreichend genau ist. In Wahrheit beträgt das preuß. Loth nur 14,626 Gramm, weil im franz. System dichtestes Wasser (4° C.), im preuß. System minder dichtes Wasser ($18\frac{3}{4}$° R.) vorausgesetzt wird.

8) Zu Neusilber nimmt man 53,4 Procent Kupfer, 29,1 Proc. Zink und 17,5 Proc. Nickel. Wieviel von diesen Metallen braucht man zu 1200 Pfd. Neusilber, wenn beim Schmelzen ein Verlust von $1\frac{1}{2}$ Proc. eintritt?

Statt 98,5 Pfd. jedes Metalls sind 100 zu nehmen, folglich

$$53{,}4 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Kupfer} = 650{,}3$$

$$29{,}1 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Zink} = 354{,}4$$

$$17{,}5 \,.\, 12 \,.\, \frac{100}{98{,}5} \text{ Pfd. Nickel} = 213{,}2$$

$$1218$$

Man berechnet 12000 : 985 = 12,18 und multiplicirt diese Zahl mit den Procenten.

Zweites Buch.

Allgemeine Arithmetik.

§. 1. Grundbegriffe.

1. Zwei Dinge können in Hinsicht ihrer Qualität (Beschaffenheit) und Quantität (Größe) verglichen werden. In Ansehung ihrer Qualität sind sie gleichartig, wenn ganz oder theilweise eines für das andere gesetzt werden kann, ungleichartig, wenn dieß nicht der Fall ist. In Ansehung ihrer Quantität heißen sie Größen und sind Gegenstand der mathematischen Wissenschaften.

Gleichartige Größen sind entweder gleich oder ungleich; von ungleichen Größen ist diejenige die größere, von welcher ein Theil der andern gleich ist. Das Urtheil, daß die Größe A der Größe B gleich ist, wird eine Gleichung (aequatio) genannt und $A = B$ bezeichnet. Die verglichenen Größen heißen die Seiten (linke und rechte, membra) der Gleichung. Daß die Größe C größer als die Größe D (D kleiner als C) ist, wird durch die Ungleichung $C > D$ bezeichnet. Daß die Größe C zwischen den Grenzen B und D liegt, mehr als jene und weniger als diese beträgt, wird durch die Begrenzung $B < C < D$ angegeben.

2. Die Menge gleichartiger Dinge wird durch eine Zahl bestimmt. Das mehrmal Vorzustellende heißt Einheit und ist entweder Eins ohne nähere Bestimmung (unbenannt, abstract), oder eine bestimmte Größe (benannt, concret), z. B. Zehner, Dutzend, Thaler, Gulden, Fuß, Grad, Pfund, Stunde u. s. w. Eine Zahl ist größer als eine andere, wenn sie mehr Einheiten enthält, als die andere. Die unbenannten Zahlen bilden die ohne Ende aufsteigende natürliche Zahlenreihe. Um die natürlichen Zahlen mit wenig Wörtern und Zeichen (Ziffern) mittheilen zu können, haben die gebildeten Völker das Decimalsystem angenommen, nach welchem zehn Einer als ein Zehner, zehn Zehner als ein Hundert, zehn Hundert als ein Tausend, tausend Tausende als eine Million, million Millionen als eine Billion, million Billionen als eine Trillion u. s. f. betrachtet werden.

Die Griechen bezeichneten, wie die semitischen Völker, die Einer, Zehner, Hunderte durch je neun Buchstaben ihres Alphabets; die Tausende durch die Zeichen der Einer, denen Striche beigefügt wurden, die Zehntausende u. s. w. wiederum durch die Zeichen der Einer, Zehner u. s. w., denen der Name Myriaden hinzugefügt wurde. Die Abtheilung großer Zahlen nach Myriaden ist von andern Völkern nicht nachgeahmt worden. Die Römer bezeichneten einen Einer, einen Zehner, ein Hundert, ein Tausend, ferner fünf Einer, fünf Zehner, fünf Hunderte durch Schriftzeichen,

welche später von gewissen Buchstaben des gemeinen Alphabets nicht mehr unterschieden wurden; vier und neun Einer wurden durch Eins vor fünf und zehn dargestellt u. s. w.

Diese Schreibarten sind seit dem 12ten Jahrhundert der christlichen Zeitrechnung durch die von den Arabern verbreitete indische Erfindung verdrängt, nach welcher die Einer durch besondere Zeichen, die Zehner durch ihren Ort zur Linken der Einer, die Hunderte, Tausende u. s. w. durch ihren Ort zur Linken der Zehner, Hunderte u. s. w. unter Einführung des zehnten Zahlzeichens 0 angegeben werden. Die Zahlwörter Million, Billion, . ., Milliarde (tausend Millionen) sind neuere Bildungen. Das Wort Million bedeutete im 16ten Jahrh. in der vulgären Sprache eine Geldsumme; als abstractes Zahlwort hat es erst im 18ten Jahrh. in die Rechenbücher allgemeinen Eingang gefunden. Vergl. die Aufsätze des Verf. in den Leipz. Berichten 1865 und Im neuen Reich 1871 p. 617.

3. Die Zahlen und ihre Verbindungen sind Gegenstand der Arithmetik. Eine Zahlenverbindung ausführen (operiren) heißt rechnen. Zur Bezeichnung der auszuführenden Zahlenverbindungen sind bestimmte Rechnungszeichen eingeführt. Zahlen im Allgemeinen, d. h. von unbestimmt viel Einheiten, werden durch verschiedene Buchstaben (große, kleine, numerirte) bezeichnet, z. B.

A	B	C	. .	
a	b	c	. .	
α	β	γ	. .	
a'	a''	a'''	. .	$a^{(n)}$
a_1	a_2	a_3	. .	a_n
a_{11}	a_{12}	a_{13}	. .	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	. .	a_{2n}

Daher nennt man die allgemeine Arithmetik auch Buchstabenrechnung (arithm. speciosa, universalis), im Gegensatz zur gemeinen Rechenkunst (logistica, arithm. numerosa), welche von jener eine Anwendung ist. Unter höherer Arithmetik (Zahlenlehre, théorie des nombres) versteht man die Lehre von den Eigenschaften der ganzen Zahlen und ganzzahligen Formen.

Bei Euclides werden allgemeine Zahlen durch Strecken bezeichnet, und Zahlenverbindungen durch Constructionen erläutert. Diophantus (in der zweiten Hälfte des 4ten Jahrh. n. Chr.) gebraucht die Anfangsbuchstaben unbestimmter Größen als Zahlzeichen, welche gegen den Anfang des Mittelalters numeri cossici (cossa, cosa, chose), später species genannt wurden. Deutlichere Anfänge der Buchstabenrechnung finden sich nach Einführung des indischen Algorithmus (Gem. Arithm. §. 14) bei Regiomontan 1460 (algorithmus demonstratus. Nürnberg 1534. Vergl. Chasles aperçu hist. p. 621 der deutschen Uebers.), und Stifel (arithm. integra 1544 fol. 252), in größerer Ausdehnung bei Vieta in der zweiten Hälfte des 16ten Jahrh.

4. Die Sätze der mathematischen Wissenschaften sind entweder Definitionen, oder Theoreme, oder Axiome. Die Definition (ὁρισμός, Erklärung) dient zur Verständigung über einen zusammengesetzten Begriff. Ein Theorem (θεώρημα, Lehrsatz, Satz, propositio) knüpft an eine Voraussetzung (ὑπόθεσις) eine Behauptung (θέσις). Axiom (ἀξίωμα Grundsatz, Hypothese) ist eine Behauptung, deren Anerkennung ohne Wei-

teres gefordert wird. Die gerühmte Richtigkeit der mathematischen Wissenschaften beruht darauf, daß sie eine äußerst geringe Anzahl von Axiomen erfordern, und daß ihre Theoreme sich (logisch) beweisen und (empirisch) prüfen lassen. Der **Beweis** (ἀπόδειξις, demonstratio) wird **direct** geführt, wenn man aus der Voraussetzung durch Schlüsse die Behauptung ableitet; **indirect** (apagogisch, ἀπαγωγή, deductio ad absurdum) wenn man aus der Verneinung der Behauptung durch Schlüsse die Verneinung der Voraussetzung ableitet. Ein **Schluß** (συλλογισμός) besteht aus Prämissen und der Conclusion, z. B. wenn $A = B$ und $B = C$, so ist $A = C$; wenn $A > B$, $B > C$, so ist $A > C$; Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert giebt Gleiches u. s. f.

Abgesehen von diesen aus dem Begriff der Gleichheit hervorgehenden Schlüssen bedarf der erste Theil der mathematischen Wissenschaften (Arithmetik, Algebra, Analysis) keiner Axiome, während die folgenden Theile (Geometrie, Mechanik) nicht ohne einige Axiome begründet werden können.

In den älteren Darstellungen bedeutet corollarium ein Theorem, welches einem andern untergeordnet und aus demselben leicht ableitbar ist; lemma (zu λαμβάνω) ein Theorem, welches einer andern Reihe angehörig zur Begründung eines umfassenderen Theorems vorausgeschickt wird.

§. 2. Die Summe.*)

(Heis §. 1 und 7.)

1. Die Summe zweier Zahlen entsteht durch Hinzuzählen (Addition) der Einheiten der zweiten Zahl zu der ersten Zahl. Beide Zahlen heißen **Glieder** (termini, termes) der Summe. Die Summe der Zahlen a und b, wird bezeichnet $a + b$, gelesen a plus b.

2. Die Glieder einer Summe können nicht anders als gleichbenannt sein, die Summe ist mit den Gliedern gleichbenannt.

3. Die Ordnung der Glieder einer Summe ist beliebig:

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c = b + a + c = a + c + b.$$

Denn die Reihe von a Einheiten, zu denen b Einheiten addirt worden,

$$\overset{1}{\smile}\!\!1 + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{a}{1} + \overset{1}{1} + \overset{2}{1} + \overset{3}{1} + \ldots + \overset{b}{1}$$

erscheint vom Ende aus als die Reihe von b Einheiten, zu denen a Einheiten addirt worden.

Die Summe $a + b + c$ erscheint nicht nur als Summe der

*) Für den Zweck der Einübung sind bei den Paragraphen des zweiten und dritten Buchs die entsprechenden Paragraphen von Heis' Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra angegeben worden.

Glieder $a + b$ und c, sondern auch als Summe der Glieder a und $b + c$, und ist daher gleichgeltend mit $b + a + c$ und $a + b + c$. Aus einer gegebenen Anordnung der Glieder lassen sich dadurch, daß man die Plätze von benachbarten Gliedern vertauscht, alle möglichen Anordnungen ableiten.

§. 3. Das Product.

(Heis §. 3 und 15, 8—16.)

1. Product heißt die Summe von gleichen Gliedern. Das mehrmal gesetzte Glied heißt Multiplicandus, die Anzahl der gleichen Glieder Multiplicator. Das Product der Zahlen a und b d. h. die Summe von b Gliedern, deren jedes a ist, wird bezeichnet ab oder $a \,.\, b$ oder $a \times b$, gelesen a multiplicirt mit b oder $b$mal a. Das Multiplicationszeichen kann nicht fehlen, wenn der Multiplicator eine gemeine Zahl ist.

$$a \,.\, 2 = a + a$$
$$a \,.\, 3 = a + a + a$$
$$ab = \underbrace{a}_{1} + \underbrace{a}_{2} + \underbrace{a}_{3} + \,.\,.\, + \underbrace{a}_{b}$$

2. Ein Multiplicator kann nicht anders als unbenannt sein, das Product ist mit dem Multiplicandus gleichbenannt (§. 2, 2).

3. Multiplicandus und Multiplicator können ohne Aenderung des Products vertauscht werden und heißen deshalb Factoren des Products. Die Ordnung der Factoren eines Products ist beliebig:

$$ab = ba$$
$$abc = bac = acb = \ldots$$
$$\begin{aligned} 5 \times 3 = 1 &+ 1 + 1 + 1 + 1 = 3 \times 5. \\ &+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

Denn 3 Zeilen von je 5 Einheiten erscheinen von der Seite betrachtet als 5 Colonnen von je 3 Einheiten. Ebenso sind c Zeilen von je b Gliedern a zugleich b Colonnen von je c Gliedern und enthalten zusammen bc Glieder (§. 2, 3).

Man schreibt gewöhnlich $2a$, $3a$, . . statt $a.2$, $a.3$, . . , so daß $5a = 2a + 3a$ u. s. w. Um mit bc zu multipliciren, kann man mit b multipliciren und das Product wiederum mit c. Man findet $3a \,.\, 2b = 6ab$, u. s. w.

Wenn das Product von n Factoren von der Anordnung der Operation unabhängig ist, so ist auch das Product von $n + 1$ Factoren $a, b, c, d, e,$ . . von der Anordnung der Operation unabhängig. Man führt dieses Product auf ein Product

von n Factoren dadurch zurück, daß man entweder a mit b, oder a mit einem andern Factor c, oder ein anderes Paar Factoren c mit d zu einem Product vereint. Nach der Voraussetzung findet man gleiche Producte aus den Systemen von Factoren

$$ab, c, d, e, \ldots \text{ und } abc, d, e, \ldots$$
$$ac, b, d, e, \ldots \text{ und } acb, d, e, \ldots$$
$$a, b, cd, e, \ldots \text{ und } ab, cd, e, \ldots$$
$$ab, c, d, e, \ldots \text{ und } ab, cd, e, \ldots$$

Nun ist $acb = abc$, folglich stimmen alle diese Producte von n Factoren überein, und das Product von $n + 1$ Factoren ist von der Anordnung der Operation unabhängig. Diese Unabhängigkeit findet aber bei 3 Factoren statt, also auch bei 4, 5, .. Factoren (Dirichlet Zahlentheorie von Dedekind §. 2).

§. 4. Die Potenz.

(Heis §. 5.)

Potenz heißt das Product von gleichen Factoren. Der mehrmal gesetzte Factor heißt **Dignandus**, die Anzahl der gleichen Factoren **Exponent**. Dignandus, Exponent und Potenz können nicht anders als unbenannt sein. Die $b$te Potenz von a, d. h. das Product von b Factoren, deren jeder a ist, wird bezeichnet a^b, gelesen a potenzirt mit b, oder a zur $b$ten (Potenz), oder a hoch b. Die erste Potenz einer Zahl ist die Zahl selbst; die zweite Potenz der Zahl wird ihr **Quadrat** genannt, die dritte **Cubus**, die vierte **Biquadrat**. **Coefficient** einer Potenz heißt ein von dem Dignandus unabhängiger Factor der Potenz oder das Product solcher Factoren.

$$a^2 = aa, \quad a^3 = aaa, \quad a^5 = a^4a = a^3a^2$$

$$a^b = \underset{1}{\underbrace{a}}\ \underset{2}{\underbrace{a}}\ \underset{3}{\underbrace{a}} \ldots \underset{b}{\underbrace{a}}$$

$$3a \,.\, 2a = 6a^2, \quad 2ab^2 \,.\, 7a^2b^3. = 14a^3b^5, \quad a^ba = a^{b+1}.$$

Dignandus und Exponent können im Allgemeinen nicht vertauscht werden. Es ist zwar $2^4 = 4^2$, aber 2^3 ist von 3^2 verschieden, u. s. w.

§. 5. Die indirecten Operationen.

(Heis §§. 2. 4. 41. 56.)

1. Wenn die Summe und ein Glied gegeben ist, so läßt sich das andere Glied bestimmen, indem man zu dem gegebenen Gliede ein hinreichendes Glied (**Differenz**) addirt.

2. Wenn das Product und ein Factor gegeben ist, so läßt sich der bere Factor bestimmen, indem man den gegebenen Factor mit einem reichenden Factor (**Quotient**) multiplicirt.

3. Wenn die Potenz und der Exponent gegeben ist, so läßt sich der ignandus bestimmen, indem man eine hinreichende Zahl (**Wurzel**) t dem gegebenen Exponenten potenzirt.

Wenn die Potenz und der Dignandus gegeben ist, so läßt sich der Exponent bestimmen, indem man den Dignandus mit einer hinreichenden Zahl (Logarithmus) potenzirt.

Auf das Potenziren gründen sich zwei indirecte Operationen, weil Dignandus und Exponent nicht vertauschbar sind.

§. 6. Die Formeln.

(Heis §. 6.)

1. Formel (formula, forma) heißt eine Verbindung von Zahlen durch Rechnungszeichen, z. B. $a + b$, ab, a^b. Ein Product (Potenz) heißt eintheilig (mononomium, verkürzt monomium); eine Summe heißt nach der Anzahl ihrer Glieder zweitheilig, dreitheilig, vieltheilig (binomium, trinomium, polynomium).

2. Formeln werden wie einzelne Buchstaben durch Rechnungszeichen verbunden, nachdem man sie in Klammern eingeschlossen hat (παρέν-θεσις, Parenthese). Zur Einschließung von Parenthesen gebraucht man Klammern von verschiedener Gestalt. Die Einschließung ist unnöthig, wenn eine Summe zu addiren, ein Product zu multipliciren ist (§. 2, 3 und §. 3, 3), z. B.

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad (ab)c = a(bc) = abc.$$

Bei Eucl. X, 37 wird die zweitheilige Formel $a + \sqrt{b}$ als ἐκ δύο ὀνομάτων (ex binis nominibus) bezeichnet; davon ist das Wort binomium gebildet, dessen besonderer Sinn bis ins 18te Jahrhundert sich erhalten hat. Die richtigeren Bildungen uninomium, multinomium haben keinen Eingang gefunden. Vieta (1580) machte über die zusammengehörigen Glieder Striche, wie sie noch bei den Wurzeln der mehrtheiligen Formeln gebraucht werden. Der Gebrauch der Klammern, welche seit dem 17ten Jahrhundert (vergl. Klügel math. W. I. p. 52) vorkommen, ist im 18ten Jahrhundert allgemein geworden.

Die jetzt gebräuchlichen Rechnungszeichen sind sämmtlich nach Erfindung des Bücherdrucks eingeführt worden. Das Gleichheitszeichen (=), welches zuerst Recorde 1552 gebraucht hat (vergl. Klügel math. W. I. p. 42), kam erst 100 Jahre später in allgemeinern Gebrauch. Das Ungleichheitszeichen (<) kommt im Anfange des 17ten Jahrhunderts bei Harriot vor (Klügel I. p. 50). Die Wörter plus und minus wurden in Italien und Frankreich zuerst durch die Anfangsbuchstaben p und m, in Deutschland aber schon in der zweiten Hälfte des 15ten Jahrhunderts durch + und — bezeichnet (vergl. Drobisch de Widmanni compendio 1489 edito. 1840 p. 20). Diese Zeichen werden jedoch einem bestimmten Erfinder nicht zugeschrieben, und sind deshalb vielleicht nichts weiter als Deformationen jener Buchstaben. Eine andere Ansicht über den Ursprung derselben Zeichen hat de Morgan (Athenaeum n. 1931 p. 565, 1864 Oct. 29) angedeutet.

Die Zusammenstellung der Factoren eines Products ohne Rechnungszeichen find[et] sich bei Stifel arithm. 1544 fol. 225; das Multiplicationszeichen (×) kommt b[ei] Oughtred (clavis math. 1631), der Punct bei Leibniz in der zweiten Hälf[te] des 17ten Jahrhunderts vor. Bei Diophantus und seinen Nachfolgern wird ein[e] unbestimmte Zahl (die Unbekannte) ἀριθμός, res, cosa, radix genannt; ihr Quadr[at] δύναμις, potentia, potestas, census, censo in Folge des alten Gebrauchs d[er] Wörter δύναμις, δύνασθαι (Eucl. El. X); ihre dritte Potenz κῦβος, cubus. Die höheren Potenzen führen zusammengesetztere Namen δυναμο-δύναμις u. s. w.

Den Namen dignitas hat Bombelli 1572 gebraucht, während potestas und coefficiens durch Vieta üblich geworden ist. Die Bezeichnung der Potenzen ward durch Stifel vorbereitet, welcher der Reihe 1, 1*A*, 1*AA*, 1*AAA*, . . die Nummern 0, 1, 2, 3, . . überschrieb, die er Exponenten nannte (arithm. fol. 250 und in der Herausgabe von Christ. Rudolff's Coss. 1553 fol. 62). Nachdem Stevin 1585 (vergl. Klügel math. W. I. p. 43) die Benennung der Potenzen nach ihren Exponenten eingeführt hatte, wurde die jetzige Bezeichnung der Potenzen durch Herigogne (cursus math. Paris 1634) und Descartes 1637 verbreitet.

§. 7. Die Differenz.

(Heis §. 2.)

1. Die Differenz (Unterschied) zweier Zahlen ist die Zahl, zu welcher die zweite addirt die erste giebt. Die erste Zahl heißt Minuendus, die zweite Subtrahendus, so daß

Differenz + Subtrahendus = Minuendus.

Die Differenz von a und b wird bezeichnet $a - b$, gelesen a minus b. Die Berechnung einer Differenz heißt Subtraction und kommt durch Abzählen der Einheiten des Subtrahenden vom Minuenden zu Stande. Um eine Differenz zu prüfen, hat man zu ihr den Subtrahenden zu addiren und die Summe mit dem Minuenden zu vergleichen. Insbesondere ist $a + b - b = a$, $a + b + c + d - (c + d) = a + b$, $5a - 3a = 2a$ u. s. f. Aus der Begrenzung $a < x < b$ schließt man, daß $x - a < b - a$.

2. Minuend und Subtrahend können nicht anders als gleichbenannt sein, die Differenz ist mit ihnen gleichbenannt und giebt an, um wieviel größer der Minuend ist als der Subtrahend.

3. Wenn der Minuend dem Subtrahenden gleich ist, so ist die Differenz 0 (Null, ziphra, zéro). Wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, so kann die Differenz in Form eines Subtrahenden (ohne Minuenden) angegeben werden, z. B.

$$7 - 7 = 0$$
$$7 - 8 = -1$$
$$7 - 9 = -2$$
$$a - (a + c) = -c$$
$$a - b = -(b - a)$$

weil von a nicht mehr als a subtrahirt werden kann, folglich $b - a$ zu subtrahiren bleibt.

Um alle Subtractionen ohne Ausnahme ausführen zu können, setzt man die Reihe der natürlichen Zahlen rückwärts über Null fort durch Zahlen, welche das Zeichen der Subtrahenden (—) vor sich tragen und negativ genannt werden, während die natürlichen Zahlen, denen

zur Verdeutlichung des Gegensatzes das Additionszeichen (+) vorgesetzt werden kann, **positiv** heißen:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Die negativen Zahlen sind ebenso aus der negativen Einheit gebildet, als die positiven Zahlen aus der positiven Einheit. Die Differenz $a - b$ wird erreicht, wenn man in dieser Reihe von Null an a Glieder vorwärts (rechts) und von da an b Glieder rückwärts geht.

Die positiven Zahlen betragen **mehr als Null**. Von den negativen Zahlen muß gesagt werden, daß sie **weniger als Null** betragen, weil eine Differenz abnimmt, wenn ihr Subtrahend wächst, z. B.

$$7 - 6, \quad 7 - 7, \quad 7 - 8, \ldots$$

bilden eine Reihe von mehr und mehr abnehmenden Gliedern. Aus dem Obersatz $-5 < 0$ leitet man durch Addition von 5 den richtigen Schlußsatz $0 < 5$ ab.

4. Eine Differenz kann als eine Summe betrachtet werden, von welcher ein Glied negativ (ein Subtrahend) ist. Demnach wird das Binomium $a + (-b)$ durch die Differenz $a - b$ erklärt. Denselben Werth hat $-b + a$, weil $-b + a + b = -b + b + a = a$.

Zwei Zahlen heißen **entgegengesetzt gleich**, wenn die eine soviel negative Einheiten als die andere positive hat, mithin ihre Summe 0 ist, z. B. 1 und -1, c und $-c$, $a - b$ und $b - a$ oder $-a + b$.

Zwei Größen heißen **entgegengesetzt**, wenn eine einem Theil der andern entgegengesetzt gleich ist, mithin ihre durch Subtraction gebildete Summe kleiner ist als die größere von beiden Größen. Z. B. eine positive und eine negative Zahl (von entgegengesetzten Zeichen), Vermögen und Schulden, Gewinn und Verlust, Fortschritt und Rückschritt, Hebung und Senkung, Beschleunigung und Verzögerung, Abstoßung und Anziehung, Pressung und Spannung u. s. w.

Wer a Thaler besitzt und b Thaler schuldet, hat $a - b$ Thaler Vermögen d. h. entweder $a - b$ Thaler wirkliches Vermögen, wenn $a - b$ positiv, oder kein Vermögen, wenn $a - b$ null, oder $b - a$ Thaler Schulden, wenn $a - b$ negativ ist. Schulden lassen sich also als negatives Vermögen und umgekehrt Vermögen als negative Schulden in Rechnung bringen.

Ein Punkt, der von einem gegebenen Punkte aus $a - b$ Fuß vorwärts gelegen ist, liegt entweder wirklich vorwärts von dem gegebenen Punkte aus, oder auf dem gegebenen Punkte selbst, oder rückwärts von demselben, je nachdem $a - b$ positiv, null, negativ ist. Negativer Fortschritt ist Rückschritt. U. s. f.

§. 8. Summe und Differenz von Polynomien.

(Heis §§. 8—13.)

1. Um von einer Summe eine Zahl zu subtrahiren, kann man von einem ihrer Glieder dieselbe subtrahiren.

$$a + b - c = a + (b - c) = a - c + b.$$

Beweis. Wenn man zu $a + (b - c)$ oder zu $a - c + b$ den Subtrahenden c addirt, indem man mit $b - c + c = b$ oder mit $a - c + c = a$ beginnt (§. 2, 3), so erhält man $a + b$, den Minuenden (§. 7, 1).

Umgekehrt: Eine Differenz wird addirt, indem man den Minuenden addirt und den Subtrahenden subtrahirt in beliebiger Ordnung.

2. Um eine Summe zu subtrahiren, hat man ihre einzelnen Glieder zu subtrahiren. Um eine Differenz zu subtrahiren, hat man den Minuenden zu subtrahiren und den Subtrahenden zu addiren.

$$a - (b + c) = a - b - c.$$
$$a - (b + c) = a - b + c.$$

Beweis. Wenn man zu $a - b - c$ den Subtrahenden $b + c$ addirt, indem man mit $a - b - c + c = a - b$ beginnt, so erhält man a, den Minuenden, weil $a - b + b = a$.

Wenn man zu $a - b + c$ den Subtrahenden $b - c$ addirt, indem man erst c subtrahirt, dann b addirt (1), so erhält man a, den Minuenden.

Daher ist auch $-4a + 7a = 3a$, $-5a + 2a = -3a$, $-4a - 3a = -7a$.

3. Um ein Polynomium (Summe oder Aggregat von positiven und negativen Gliedern) zu addiren, addirt man in beliebiger Ordnung seine einzelnen Glieder (ohne Aenderung der Zeichen). Um ein Polynomium zu subtrahiren, addirt man seine einzelnen Glieder mit den entgegengesetzten Zeichen (die positiven mit dem Zeichen $-$, die negativen mit dem Zeichen $+$).

$a + (b - c + d) = a + (b - c) + d = a + b - c + d$ (1). Ein zu addirendes Polynomium braucht also nicht in Klammern geschlossen zu werden. Dagegen ist (2)

$$a - (b - c + d) = a - (b - c) - d$$
$$= a - b + c - d.$$

Dem Binomium (Summe) wurde im Alterthum ἀποτομή, recisum, residuum (Differenz) gegenübergestellt; die Differenzen wurden in Excesse und Defecte unterschieden. Die Einführung der negativen Zahlen zur Beseitigung dieser Unterscheidung bildet einen wesentlichen Fortschritt der Neuern, welcher fast zugleich mit der Einführung der Buchstabenrechnung im 16ten Jahrh. begonnen und im 17ten Jahrh.

vollendet wurde. Vergl. Klügel math. W. I. p. 30 ff. Die Ausdrücke numerus verus und fictus (falsus) kommen bei Cardano u. A. vor, die Benennungen affirmativ (positiv) und negativ bei Vieta. Aggregat bedeutet noch bei Vieta nur eine Summe von positiven Gliedern. Die Bezeichnung eines positiven oder negativen Werthes durch einen und denselben Buchstaben kommt bei Descartes (Geom. 1637) vor; den Nutzen dieser Bezeichnung mußte noch Newton für Leibniz ausdrücklich hervorheben (Brief an Leibniz 1676 Oct. 24).

§. 9. Product von Polynomien.

(Heis §§. 14—16.)

1. Um ein Polynomium zu multipliciren, hat man seine einzelnen Glieder zu multipliciren:

$$(a - b + c)m = am - bm + cm.$$

Beweis. Die Summe von m Gliedern, deren jedes $a - b + c$ ist, hat m Glieder, deren jedes a, ferner m Glieder, deren jedes $-b$, endlich m Glieder, deren jedes c ist (§. 3, 1. §. 8, 3).

2. Um mit einem Polynomium zu multipliciren, hat man mit seinen einzelnen Gliedern zu multipliciren. Die einzelnen Producte erhalten die Zeichen der Glieder, mit denen man multiplicirt.

Beweis. $m(a - b + c) = (a - b + c)m$ nach §. 3, 3.
$= am - bm + cm$ (1)
$= ma - mb + mc.$

Anm. Ein Multiplicator kann an sich weder positiv, noch negativ sein (§. 3, 2). Mit einer positiven oder negativen Zahl multipliciren, sagt man abkürzend für „multipliciren mit der unbezeichneten (absoluten) Zahl und das Product addiren oder subtrahiren."

3. Um ein Polynomium mit einem Polynomium zu multipliciren, hat man die einzelnen Glieder des einen mit jedem Gliede des andern zu multipliciren. Factoren von einerlei Zeichen geben ein positives, von entgegengesetzten Zeichen ein negatives Product*).

Beweis. $(a - b)(c - d) = (a - b)c - (a - b)d$ nach (2)
$= ac - bc - (ad - bd)$ nach (1)
$= ac - bc - ad + bd$ nach §. 8, 2.

Die Producte $+ac$, $-bc$, $-ad$, $+bd$ kann man ansehen als entstanden aus den Multiplicationen von $+a$ mit $+c$, $-b$ mit $+c$, $+a$ mit $-d$, $-b$ mit $-d$ (2, Anm.).

Man findet

$$(a - b)(c - d) = -(b - a)(c - d)$$
$$= -(a - b)(d - c)$$
$$= (b - a)(d - c)$$

*) Diese Regel wird schon im Alterthum namentlich bei Diophantus (Arithm. I. def. 9) angewendet. Man hatte sie aus Eucl. El. II. abgeleitet.

übereinstimmend mit der für die Zeichen der Producte abgeleiteten Regel. Man findet ferner

$$(a + b)(c + d) + (a - b)(c - d) = 2ac + 2bd$$
$$(a + b)(c + d) - (a - b)(c - d) = 2ad + 2bc.$$

4. Umgekehrt: Die Glieder eines Polynomium, welche Producte sind mit einem gemeinschaftlichen Factor, lassen sich vereinigen, indem man denselben vor eine Parenthese setzt, in der die nicht gemeinschaftlichen Factoren mit den Zeichen der einzelnen Glieder oder mit den entgegengesetzten Zeichen stehen, je nachdem der gemeinschaftliche Factor das Zeichen + oder − hat.

$$a + bd - cd = a + d(b - c) = a - d(-b + c)$$
$$ac - bc - ad + bd = c(a - b) - d(a - b)$$
$$= (a - b)(c - d).$$

Wenn zwei Polynomien nach fallenden Potenzen eines Buchstabens geordnet sind, so kann ihr Product als ein nach fallenden Potenzen desselben Buchstabens geordnetes Polynomium dargestellt werden.

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)(fx^2 + gx + h)$$
$$= afx^5 + bfx^4 + cfx^3 + dfx^2$$
$$+ agx^4 + bgx^3 + cgx^2 + dgx$$
$$+ ahx^3 + bhx^2 + chx + dh$$
$$= afx^5 + (bf + ag)x^4 + (cf + bg + ah)x^3$$
$$+ (df + cg + bh)x^2 + (dg + ch)x + dh.$$

Hierin ist die Anleitung zur Multiplication mehrziffriger Decimalzahlen enthalten, weil $ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine Decimalzahl bedeutet, wenn $x = 10$ und a, b, c, d Zahlen aus der Reihe 0, 1, 2, .., 9 sind.

5. Bemerkenswerthe Beispiele

I. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

u. s. w. Die Entwickelung der Potenzen von $a - b$ erhält man, wenn man b mit $-b$ vertauscht, wodurch b^2, b^4, .. nicht verändert, aber b^3, b^5, . . negativ werden, so daß Reihen von Gliedern mit abwechselnden Zeichen entstehen.

II. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

u. s. w. Das Quadrat eines Polynomium besteht aus der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder und der doppelten Producte aus je zwei Gliedern. Die Zeichen der doppelten Producte sind durch die Zeichen der Glieder bestimmt, aus denen sie gebildet werden (3).

III. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$$

$$(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)(a - b) = a^4 - b^4$$

u. s. w. Durch Vertauschung von b mit $-b$ erhält man

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a^2 - ab + b^2)(a + b) = a^3 + b^3$$

$$(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)(a + b) = a^4 - b^4$$

IV. Wenn $x + y = u$, $xy = v$ so, ist

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v$$

$$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$$

$$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$$

$$x^5 + y^5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$$

$$x^6 + y^6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3$$

u. s. w. Denn es ist

$$x^2 + y^2 = (x + y)(x + y) - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)(x + y) - (x + y)xy$$

$$x^4 + y^4 = (x^3 + y^3)(x + y) - (x^2 + y^2)xy$$

u. s. w. Aehnliche Gleichungen erhält man, wenn man y mit $-y$, folglich v mit $-v$ vertauscht.

V. $(a^2 + nb^2)(a_1{}^2 + nb_1{}^2) = (aa_1 + nbb_1)^2 + n(ab_1 - a_1b)^2.$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 + d_1{}^2)$$

$$= (aa_1 + bb_1 + cc_1 + dd_1)^2 + (ab_1 - a_1b + cd_1 - c_1d)^2$$

$$+ (ac_1 - a_1c + db_1 - d_1b)^2 + (ad_1 - a_1d + bc_1 - b_1c)^2.$$

Diese Producte haben dieselbe Form, als ihre Factoren.

§. 10. Der Quotient.

(Heis §§. 17. 20.)

1. Der Quotient zweier Zahlen ist die Zahl, welche mit der zweiten multiplicirt die erste giebt. Die erste Zahl heißt Dividendus, die zweite Divisor, so daß

Quotient $\times$ Divisor = Dividendus.

Der Quotient von a und b wird bezeichnet $\frac{a}{b}$ oder $a:b$*), gelesen a durch b (dividirt) oder das Verhältniß von a zu b oder b in a (divi-

*) Ueber die griechische Bezeichnung der Brüche vergl. Nesselmann Gesch. d. Algebra p. 114. Der Bruchstrich scheint zugleich mit den indischen Ziffern eingeführt worden zu sein; man findet ihn bei Leonardo von Pisa (liber abaci, fol. 11). Das Colon dient bei den Engländern im 17ten Jahrh. als Trennungszeichen; der jetzige Gebrauch desselben rührt von Leibniz her. Das Pell'sche Zeichen $\div$, welches dem Dividendus nachgesetzt wurde, kommt in England bis in's 18te Jahrh. vor.

dirt). Die Berechnung eines Quotienten heißt **Division**. Um den Quotienten $a : b$ zu bilden, hat man die Vielfachen des Divisor, b, $2b$, $3b$, . . mit dem Dividenden zu vergleichen. Um den Quotienten zu prüfen, hat man ihn mit dem Divisor zu multipliciren und das Product mit dem Dividenden zu vergleichen. Insbesondere ist

$$\frac{a}{a} = 1, \quad \frac{ab}{b} = a, \quad \frac{abcd}{cd} = ab, \quad \frac{a^5}{a^3} = a^2.$$

2. Wenn der Dividend benannt ist, so muß der Divisor entweder unbenannt oder gleichbenannt sein. Im ersten Falle ist der Quotient der sovielte **Theil** des Dividenden, als der Divisor angiebt, also mit dem Dividenden gleichbenannt. Im zweiten Falle ist der Quotient das **Verhältniß***) des Dividenden zum Divisor d. h. die Zahl (unbenannt), welche angiebt, wievielmal der Divisor im Dividenden enthalten ist, **wievielmal so groß** der Dividend ist als der Divisor.

28 Thaler : 4 = 7 Thaler, weil 7 Thlr. $\times$ 4 = 28 Thaler; der 4te Theil von 28 Thalern beträgt 7 Thaler.

28 Thaler : 4 Thaler = 7, weil 4 Thaler $\times$ 7 = 28 Thaler; das Verhältniß von 28 Thalern zu 4 Thalern ist 7, d. h. 4 Thaler sind in 28 Thalern 7mal enthalten oder 28 Thaler sind 7mal so viel als 4 Thaler.

Wenn a und b unbenannt sind, so kann $a : b$ sowohl den $b$ten Theil von a als auch das Verhältniß von a zu b bedeuten.

3. Wenn der Dividend a einem Vielfachen des Divisor b nicht gleich ist, so läßt sich der Quotient $a : b$ durch natürliche Zahlen nicht genau angeben, sondern nur begrenzen, z. B.

$$3 < 22 : 7 < 4,$$

d. h. 22 : 7 liegt zwischen 3 und 4, weil 22 zwischen 3 . 7 und 4 . 7 liegt.

Liegt a zwischen den Grenzen bx und $b(x + 1)$, so fällt der Quotient $a : b$ zwischen x und $x + 1$, und x heißt die **ganze Zahl** des Quotienten $a : b$, die Differenz $a - bx$ heißt der **Rest** dieser Division. Wenn a näher an $b(x + 1)$ als an bx liegt, so ist der Quotient näher $x + 1$ als x; nimmt man nun $x + 1$ als die genauere ganze Zahl des Quotienten, so nennt man die negative Zahl $a - b(x + 1)$ den **kleinsten Rest** der Division. Wenn der Rest 0 ist, so ist x der genaue Quotient und man sagt, die Division **geht auf**, a ist durch b **theilbar** (ohne Rest).

Ueberhaupt wenn $a = bx + y$ ist, so kann man x als die ganze Zahl und y als den Rest der Division $a : b$ betrachten.

---

*) λόγος, ratio, proportio, rapport.

4. Um alle Divisionen ohne Ausnahme ausführen zu können, denkt man eine Einheit (deren Vielheiten die natürlichen Zahlen sind) in so viel gleiche Theile getheilt, als der Divisor angiebt. Ein solcher Theil $\left(\frac{1}{b}\right)$ heißt eine **gebrochene Einheit**, eine Mehrheit derselben eine **gebrochene Zahl**, ein **Bruch** (fractio). Die Anzahl der gebrochenen Einheiten eines Bruches heißt der **Zähler** (numerator), die Anzahl der Theile, in welche eine natürliche Einheit gebrochen ist, der **Nenner** (denominator) des Bruches. Im Gegensatz zu den Brüchen werden die natürlichen Zahlen **ganz** (integer) genannt. Die Summe einer ganzen und einer gebrochenen Zahl heißt eine **gemischte Zahl**.

Jeder Quotient läßt sich als Bruch darstellen, dessen Nenner der Divisor, dessen Zähler der Dividend ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}\, a.$$

(Die Einschließung von $\frac{1}{b}$ in Klammern ist überflüssig.) Denn wenn man $\frac{1}{b}\, a$ mit dem Divisor b multiplicirt, indem man mit $\frac{1}{b}\, b = 1$ beginnt, so erhält man a, den Dividenden.

Der Bruch heißt **uneigentlich**, wenn der Zähler ein Vielfaches des Nenners, **echt** (genuina), wenn der Zähler kleiner als der Nenner, **unecht** (spuria), wenn der Zähler größer als der Nenner. Der uneigentliche Bruch ist einer ganzen Zahl gleich, der echte Bruch beträgt weniger als 1, der unechte Bruch beträgt mehr als 1.

§. 11. Quotient von Producten.

(Heis §§. 21. 22. 18. 23. 24.)

1. Um durch ein Product zu dividiren, kann man durch seine Factoren nach einander dividiren:

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c = \frac{a}{c} : b.$$

Beweis. Wenn man den Quotienten $\frac{a}{b} : c$ mit dem Divisor bc multiplicirt d. h. $\frac{a}{b} : c$ mit c und das Product $\frac{a}{b}$ mit b (§. 3, 3), so erhält man a, den Dividenden (§. 10, 1). Denselben erhält man, wenn man $\frac{a}{c} : b$ mit b und das Product mit c multiplicirt.

Umgekehrt: Um einen Bruch zu dividiren, multiplicirt man den Nenner.

2. Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}.$$

Beweis. $\frac{am}{bm} = \frac{am}{m} : b \; (1) = \frac{a}{b}.$

$$\frac{a : n}{b : n} = \frac{(a : n)n}{(b : n)n} = \frac{a}{b}.$$

3. Um ein Product zu dividiren, kann man einen Factor desselben dividiren:

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c}\, b = \frac{b}{c}\, a.$$

Beweis. Wenn man $\frac{a}{c}\, b$ mit dem Divisor c d. h. $\frac{a}{c}$ mit c und das Product mit b multiplicirt, so erhält man ab, den Dividenden. Denselben erhält man, wenn man $\frac{b}{c}\, a$ mit c d. h. $\frac{b}{c}$ mit c und das Product mit a multiplicirt.

Umgekehrt: Um einen Bruch zu multipliciren, multiplicirt man den Zähler.

4. Mit einem Bruche multipliciren sagt man abkürzend für dividiren durch seinen Nenner und multipliciren mit seinem Zähler, wobei die Ordnung der Operationen beliebig ist. Mit $\frac{b}{c}$ multipliciren heißt den $c$ten Theil $b$mal setzen oder das $b$fache durch c dividiren.

$$a\,\frac{b}{c} = \frac{a}{c}\, b = \frac{ab}{c} = \frac{b}{c}\, a.$$

Die 3 letzten Formeln stimmen überein nach (3).

Ein Multiplicator kann an sich nicht gebrochen sein (§. 3, 2). Die Ordnung der Factoren eines Products ist auch dann beliebig, wenn Factoren Brüche sind.

5. Um einen Bruch mit einem Bruche zu multipliciren, multiplicirt man den Zähler mit dem Zähler, den Nenner mit dem Nenner:

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Beweis. $\frac{a}{b}\,\frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\,c\right) : d$ (4). Nun ist $\frac{a}{b}\,c = \frac{ac}{b}$ (3) und $\frac{ac}{b} : d = \frac{ac}{bd}$ (1).

6. Um durch einen Bruch zu dividiren, multiplicirt man mit dem reciproken (umgekehrten) Bruche, welcher durch die Vertauschung von Nenner und Zähler entsteht:

$$a : \frac{b}{c} = a\,\frac{c}{b}.$$

Beweis. Wenn man $a\,\frac{c}{b}$ mit dem Divisor $\frac{b}{c}$ multiplicirt (4), so erhält man $\frac{acb}{bc}$ (5) $= a$, den Dividenden.

7. Zwei Zahlen heißen reciprok, eine das Reciproke der andern, wenn ihr Product 1 ist. Eine derselben wird gefunden, indem man 1 durch die andere dividirt. Z. B. a und $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ sind reciprok; das Reciproke eines echten Bruches ist ein unechter Bruch. Kleinheit und Größe, Nähe und Ferne, Langsamkeit und Geschwindigkeit u. dgl. können als reciprok betrachtet werden. Wenn A $n$mal so klein, so nahe, so langsam ist als B, so ist A auch $\frac{1}{n}$mal (den $n$ten Theil) so groß, so fern, so geschwind als B.

8. I. Wenn bei unverändertem Zähler der Nenner des Bruches hinreichend groß wird, so wird der Bruch beliebig klein d. h. kleiner als jede gegebene Zahl. Wenn der Nenner unendlich groß wird (∞ nach Wallis u. A.) d. h. jede beliebige Zahl übersteigt, so erreicht der Bruch die Grenze (limes) 0.

II. Wenn bei unverändertem Zähler der Nenner des Bruches verschwindet, d. h. durch fortgesetzte Abnahme null wird, so wird der Bruch unendlich. Denn Division durch einen echten Bruch ist Multiplication mit einem unechten Bruche (6).

III. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches zugleich verschwinden oder unendlich werden, und wenn von den Factoren eines Products der eine verschwindet, während der andere unendlich wird, so wird der Bruch und das Product im Allgemeinen unbestimmt. Denn es giebt unbestimmt viel verschiedene Werthe, welche mit einem verschwindenden Factor multiplicirt verschwinden; und die Multiplication mit einer ohne Ende wachsenden Zahl ist gleichbedeutend mit der Division durch eine verschwindende Zahl. Wenn aber der Zähler und der Nenner des Bruches

oder die Factoren des Products ihre besonderen Werthe dadurch erhalten, daß einem in ihnen vorkommenden Buchstaben ein besonderer Werth beigelegt wird, so läßt sich in jedem gegebenen Falle die Grenze angeben, welche der Bruch oder das Product erreicht, z. B. bei $b = a$ wird

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = 2a$$

weil überhaupt $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

IV. Wenn bei unverändertem Dignanden der Exponent einer Potenz unendlich wird, so erreicht die Potenz die Grenze ∞ oder 0, je nachdem der Dignand mehr oder weniger als 1 ist.

Beweis. Nach §. 9, 5 hat man

$$a^n - 1 = (a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)(a - 1).$$

Unter der Voraussetzung $a > 1$ ist $a^2 > 1$, u. s. f. daher

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1 > n$$

$$a^n > 1 + n(a - 1).$$

Bei hinreichend großem n übersteigt $n(a - 1)$, also auch a^n jede gegebene Zahl. Dagegen ist

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \ (5)$$

beliebig klein bei hinreichend großem n (I).

V. Wenn der Exponent einer Potenz unendlich wird, während der Dignand die Grenze 1 erreicht, so kann die Potenz auch eine andere Grenze als ∞ oder 0 erreichen, welche in jedem gegebenen Falle sich berechnen läßt (§. 31).

§. 12. Quotient von Polynomien.

(Heis §§. 19. 25. 26.)

1. Um ein Polynomium zu dividiren, hat man seine einzelnen Glieder zu dividiren:

$$\frac{a - b + c}{d} = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}.$$

Beweis. Wenn man $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$ mit dem Divisor d multi-cirt (§. 9, 1), so erhält man $\frac{a}{d}\,d - \frac{b}{d}\,d + \frac{c}{d}\,d = a - b + c$, 1 Dividenden.

Anmerkung. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$,

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c},$$

wie man durch Multiplication des Quotienten mit dem Divisor nach (§. 9, 3) beweisen kann.

Die Grenze, welche $\frac{ab}{a+b}$ erreicht, wenn b unendlich wird, ergiebt sich, nachdem man den Zähler und den Nenner durch b dividirt hat. Nach §. 11, 2 ist

$$\frac{ab}{a+b} = \frac{a}{\frac{a}{b}+1}.$$

Wenn nun b unendlich wird, so verschwindet $\frac{a}{b}$ (§. 11, 8), und der gegebene Bruch nimmt den Werth a an. Ebenso findet man für

$$\frac{a + bx + cx^2}{f + gx + hx^2}$$

bei unendlich großem x den Werth $\frac{c}{h}$, nachdem man den Zähler und den Nenner durch x^2 dividirt hat.

Für $\frac{a^n - 1}{a - 1}$ ergiebt sich bei $a = 1$ der Werth n (§. 11, 8. IV).

2. Umgekehrt: Brüche von einerlei Nenner lassen sich in einen Bruch desselben Nenners vereinigen, dessen Zähler ein Polynomium ist, bestehend aus den einzelnen Zählern mit den Zeichen der Brüche oder mit den entgegengesetzten Zeichen, je nachdem der zu bildende Bruch das Zeichen + oder − hat.

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a-b+c}{d} = -\frac{-a+b-c}{d}.$$

Die gemischte Zahl $a + \frac{b}{c}$ läßt sich in den Bruch $\frac{ac+b}{c}$ einrichten, nachdem man $\frac{ac}{c}$ für a gesetzt hat.

3. Brüche von verschiedenen Nennern lassen sich vereinigen, nachder man ihnen nach §. 11, 2 einen gemeinschaftlichen Nenner (Generalnenner) gegeben hat. Wenn die einzelnen Nenner gemeinschaftlid Factoren nicht haben, so ist ihr Product der kleinste unter den mög

lichen Generalnennern. Sind z. B. p, q, r die einzelnen Nenner, so ist pqr der Generalnenner, welchen die Brüche annehmen, indem man ihre Zähler und Nenner der Reihe nach mit qr, pr, pq multiplicirt. Wenn in mehrern Nennern derselbe Factor oder Potenzen desselben vorkommen, so hat man in das zu bildende Product von diesem Factor nur die höchste Potenz aufzunehmen, welche in den einzelnen Nennern anzutreffen ist. Sind z. B. p^2q, q^2r, pr^2 die einzelnen Nenner, so ist $p^2q^2r^2$ der Generalnenner, welchen die Brüche erhalten, indem man ihre Zähler und Nenner der Reihe nach mit qr^2, p^2r, pq^2 multiplicirt.

Anm. Um Brüche von verschiedenen Nennern zu vergleichen, bilde man ihre Differenz oder ihren Quotienten. Wenn die Differenz des ersten und zweiten Bruches positiv, oder der Quotient des ersten und zweiten Bruches unecht ist, so ist der erste Bruch größer als der zweite, z. B.

$$\frac{a+m}{b+m} - \frac{a}{b} = \frac{(a+m)b-(b+m)a}{(b+m)b} = \frac{(b-a)m}{(b+m)b}.$$

$$\frac{a+m}{b+m} : \frac{a}{b} = \frac{ab+bm}{ab+am}.$$

Jene Differenz ist positiv und dieser Quotient unecht, wenn $a < b$ und m positiv ist; folglich ist

$$\frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}, \text{ wenn } a < b \text{ und } m \text{ positiv ist.}$$

4. Um durch ein Polynomium zu dividiren, kann man nicht durch die einzelnen Glieder desselben dividiren. Der Quotient würde mit dem vollständigen Divisor multiplicirt ein Product geben, welches von dem Dividenden verschieden ist.

Eine theilweise Division (Partialdivision) wird ermöglicht*), wenn man den Dividenden und den Divisor nach der Reihe der in ihren Gliedern vorkommenden Potenzen desselben Buchstabens ordnet, entweder beide nach den fallenden Potenzen des Buchstabens, so daß die Glieder voranstehen, welche die höchsten Potenzen enthalten, oder beide nach den steigenden Potenzen des Buchstabens. Das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisor dividirt giebt dann das erste Glied des Quotienten, dessen Product mit dem vollständigen Divisor von dem vollständigen Dividenden subtrahirt eine Differenz giebt, welche ein Rest heißt. Das erste Glied dieses Restes durch das erste

*) Die Einführung derselben trifft mit der Erfindung der Buchstabenrechnung zusammen. Die von den Arabern ausgebildete Division einer mehrstelligen Decimalzahl durch eine andere diente zum Vorbild.



Glied des Divisor dividirt giebt das zweite Glied des Quotienten, dessen Product mit dem vollständigen Divisor von dem Reste subtrahirt einen neuen Rest giebt, der wie der vorige Rest behandelt wird.

Wenn man zu dem Reste 0 gelangt, so ist der Quotient vollständig gefunden und man sagt, daß die Division aufgeht; denn das Product des vollständigen Divisor mit allen Gliedern des Quotienten wurde vom Dividenden nach und nach subtrahirt, wobei die Differenz 0 sich ergeben hat.

Wenn die Division nicht aufgeht, so wird sie nach Entwickelung einer hinreichenden Anzahl von Gliedern des Quotienten abgebrochen, und man erhält als vollständigen Quotienten eine gemischte Zahl, indem man den Quotienten des zuletzt behaltenen Restes durch den vollständigen Divisor als Bruch den gefundenen Gliedern des Quotienten hinzufügt.

Beweis. Wenn A den Dividenden, B den Divisor, C die gefundenen Glieder des Quotienten, R den zuletzt behaltenen Rest bedeutet, so ist $R = A - BC$, und $A = BC + R$, folglich (1)

$$\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B}.$$

Beispiel. Um $12x^2 + 54y^2 + 48yz - 51xy - 24xz$ durch $4x - 9y - 8z$ zu dividiren, ordnet man den Dividenden und Divisor beide nach den fallenden Potenzen eines Buchstabens z. B. x wie folgt:

$$\begin{array}{l}
12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz : 4x - 9y - 8z \\
\underline{12x^2 - 27xy - 24xz \qquad\qquad\qquad} = 3x - 6y \\
\qquad - 24xy \qquad + 54y^2 + 48yz \\
\qquad \underline{- 24xy \qquad + 54y^2 + 48yz} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Das erste Glied des Quotienten findet man aus $12x^2 : 4x$, den ersten Rest durch Subtraction des Products $3x(4x - 9y - 8z)$ vom Dividenden; das zweite Glied des Quotienten aus $- 24xy : 4x$, den zweiten Rest durch Subtraction des Products $- 6y(4x - 9y - 8z)$ vom Dividenden. Dieser Rest ist 0, also geht die Division auf und der vollständige Quotient ist $3x - 6y$.

Bei den nicht aufgehenden Divisionen durch

$$a + bx, \quad a + bx + cx^2, \quad a + bx + cx^2 + dx^3, \ldots$$

erhält man unendliche Reihen von Gliedern mit steigenden Potenzen von x. Jedes Glied einer solchen Reihe kann in dem ersten Falle aus dem vorhergehenden Gliede, in den andern Fällen aus den 2, 3, . . vorhergehenden Gliedern nach einem von der Stelle des Gliedes unabhängigen Gesetz berechnet werden. Deshalb heißen solche Reihen recurrente (nach Moivre Miscell. analyt. 1730). Und wenn eine Reihe recurrent ist, so läßt sich der Bruch angeben, aus dem sie hervorgeht. Vergl. Euler Introd. I. Klügel math. W. 4 p. 324. Cauchy Anal. algébr. c. 12.

5. Bemerkenswerth ist die aufgehende Division (§. 9, 5)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

und die nicht aufgehende Division

$$\frac{a^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} + \frac{b^n}{a - b}$$

welche aus der vorigen folgt, weil (1)

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^n}{a - b} - \frac{b^n}{a - b}.$$

Indem man b mit $-b$ vertauscht, erhält man für die Quotienten $\frac{a^n - (-b)^n}{a + b}$, $\frac{a^n}{a + b}$ Reihen von Gliedern mit abwechselnden Zeichen. Die Summe $a + b$ geht entweder in $a^n - b^n$ oder in $a^n + b^n$ auf. Wenn $a = 1$ ist, so findet man*)

$$\frac{1 - b^n}{1 - b} = \frac{b^n - 1}{b - 1} = 1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}$$

$$\frac{1}{1 - b} = 1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1} + \frac{b^n}{1 - b}.$$

Insbesondere, wenn $b < 1$ und n unendlich wächst, so verschwindet b^n und $\frac{b^n}{1 - b}$ (§. 11, 8), folglich ist unter dieser Voraussetzung

$$\frac{1}{1 - b} = 1 + b + b^2 + b^3 + \dots$$

die Summe einer Reihe von unendlich vielen Gliedern.

Die Quotienten

$$\frac{x^{12}y^7 - x^7y^{12}}{x - y},\quad \frac{c}{a - x},\quad \frac{c}{a^2 - ax + x^2},\quad \frac{1 + x}{1 + y}$$

lassen sich aus den gefundenen Quotienten ableiten, weil

$$\frac{x^{12}y^7 - xy^{12}}{x - y} = x^7y^7\,\frac{x^5 - y^5}{x - y}$$
$$= x^7y^7(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$
$$= x^{11}y^7 + x^{10}y^8 + x^9y^9 + x^8y^{10} + x^7y^{11}$$

$$\frac{c}{a - x} = \frac{c}{a}\,\frac{1}{1 - \frac{x}{a}}$$

$$\frac{c}{a^2 - ax + x^2} = \frac{c(a + x)}{a^3 + x^3} = \frac{c}{a^3}(a + x)\,\frac{1}{1 + \frac{x^3}{a^3}}$$

---

*) Im Alterthum aus Eucl. Elem. 9, 35 bekannt.

$$\frac{1+x}{1+y} = 1 + \frac{x-y}{1+y} = 1 + x - y - (x-y)y + \ldots$$

6. Aus der Gleichung

$$\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

schließt man unter der Voraussetzung $a > b$ wie §. 11, 8, daß

$$\text{I.} \qquad (n+1)b^n < \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} < (n+1)a^n.$$

Daher findet man, wenn ω ein echter Bruch ist,

$$m < \frac{(1+\omega)^m - 1}{\omega} \qquad \frac{1-(1-\omega)^m}{\omega} < m$$

$$(1+\omega)^m > 1 + m\omega \qquad 1 - m\omega < (1-\omega)^m$$

folglich ist

$$(1+\omega)^m > c, \text{ wenn } 1 + m\omega > c \quad \text{d. h. } m > (c-1) : \omega$$

$$(1-\omega)^m < d, \text{ wenn } 1 - m\omega < d \quad \text{d. h. } m > (1-d) : \omega.$$

Ebenso findet man (I)

$$(1+\omega)^{n+1} - 1 < (n+1)\omega\,(1+\omega)^n \text{ d. h. } (1+\omega)^n\,(1-n\omega) < 1$$

$$\text{II.} \qquad 1 + n\omega < (1+\omega)^n < \frac{1}{1-n\omega}.$$

Ferner ist (I)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\text{III.} \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

d. h. $(1\tfrac{1}{2})^2$, $(1\tfrac{1}{3})^3$, .. bilden eine steigende Reihe. Nun ist (II)

$$1 + \frac{1}{k} < \left(1+\frac{1}{kn}\right)^n < \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < \left(1+\frac{1}{kn}\right)^{kn} < \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)^k$$

Also steigen die Glieder der Reihe nicht bis 4 ($k = 2$).

Indem man $a = b + 1$ setzt, findet man weiter (I)

$$(n+1) \cdot 1^n < 2^{n+1} - 1^{n+1}$$
$$(n+1) \cdot 2^n < 3^{n+1} - 2^{n+1}$$
$$(n+1) \cdot 3^n < 4^{n+1} - 3^{n+1}$$

u. s. w. folglich durch Addition

$$(n+1)(1^n + 2^n + \ldots + k^n) < (k+1)^{n+1} - 1.$$

Ebenso erhält man auch

$$1^{n+1} - 0^{n+1} < (n + 1) \,.\, 1^n$$
$$2^{n+1} - 1^{n+1} < (n + 1) \,.\, 2^n$$
$$3^{n+1} - 2^{n+1} < (n + 1) \,.\, 3^n$$

u. s. w., folglich durch Addition

$$k^{n+1} < (n + 1)(1^n + 2^n + .. + k^n).$$

Die gefundene Begrenzung

$$k^{n+1} < (n + 1)(1^n + 2^n + .. + k^n) < (k + 1)^{n+1} - 1$$

giebt zu erkennen, daß

$$(n + 1)(1^n + 2^n + .. + k^n) - k^{n+1} < (k + 1)^{n+1} - k^{n+1} - 1$$

und nach Division durch $(n + 1)k^{n+1}$, daß

$$\frac{1^n + 2^n + .. + k^n}{k^{n+1}} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}\left\{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{n+1} - 1 - \frac{1}{k^{n+1}}\right\}$$

Bei hinreichend großem k wird die rechte Seite beliebig klein. Also erreicht bei unendlich großem k

$$\frac{1^n + 2^n + .. + k^n}{k^{n+1}} \text{ den Werth } \frac{1}{n+1} \; *).$$

§. 13. Theilbarkeit der Zahlen**).

(Heis §. 27 und 28.)

1. Wenn der Quotient der (ganzen) Zahlen a und m eine ganze Zahl ist, wenn also die Division von a durch m aufgeht, so sagt man, a ist **theilbar** durch m, m geht auf in a, a ist ein **Dividuus** (Multiplum, Vielfaches) von m, m ist ein **Divisor** (Theiler, Maß) von a. Alle Zahlen von der Form mx, welche die Formel mx umfaßt, wenn für die Unbestimmte (indeterminata) x beliebige ganze Zahlen gesetzt werden, sind durch m theilbar. Die durch 2 theilbaren Zahlen von der Form $2x$ heißen **gerade** (pares). Die durch 2 nicht theilbaren Zahlen $2x + 1$ heißen **ungerade** (impares). Eucl. VII. def. 5 ff.

Wenn a durch m theilbar, und m durch p theilbar ist, so ist auch a durch p theilbar. Denn nach Voraussetzung ist $a = mx$, $m = py$, folglich $a = pxy$. Und wenn a durch m theilbar und z eine beliebige Zahl ist, so ist auch das Product az durch m theilbar.

---

*) Diesen Satz, dessen Anfänge bei **Archimedes** (Spiralen 10) zu finden [s]ind, und dessen Aufstellung der erste Schritt zur Berechnung bestimmter Integrale [wa]r, haben die Mathematiker der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts entwickelt. [F]ermat und Roberval Brief von 1636 Oct. 11 (Fermat opp. p. 140), Pascal [Oe]uvres éd. Lahure II p. 482, Wallis Arithm. infin. 1656. Vgl. Stereom. §. 9.

**) In diesem der Arithmetik im engeren Sinne (Zahlenlehre) angehörigen Para[gr]aphen wird unter Zahl eine ganze Zahl verstanden.

2. Wenn a und b durch m theilbar, x und y beliebige Zahlen sind, so ist $ax \pm by$ durch m theilbar (Eucl. V, 1). Denn nach der Voraussetzung ist $a = m\alpha$, $b = m\beta$, folglich $ax \pm by = m(\alpha x \pm \beta y)$.

Wenn von den Differenzen $a - b$ und $c - d$ jede durch m theilbar ist, so sind auch

$$a \pm c - (b \pm d), \quad ac - bd, \quad a^2 - b^2, \quad a^3 - b^3, \ldots$$

durch m theilbar. Denn

$$a \pm c - (b \pm d) = (a - b) \pm (c - d)$$
$$ac - bd = (a - b)c + b(c - d)$$
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2), \text{ u. s. f.}$$

3. Wenn die Zahl a durch die Zahl b dividirt den Rest c giebt, wenn wiederum b durch c dividirt den Rest d giebt, u. s. f., so bleibt endlich der Rest 0, weil die (ganzen) Zahlen $b, c, d, \ldots$ eine fallende Reihe bilden, und man hat die Kette von Gleichungen (§. 10, 3)

$$a = pb + c$$
$$b = qc + d$$
$$\cdots\cdots$$
$$f = tg + h$$
$$g = uh.$$

Der letzte von Null verschiedene Rest h der gefundenen Reihe ist der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen a und b. Denn h ist ein Divisor von g, also auch (2) von $tg + h$ d. i. f, also auch von jedem vorangehenden Rest, sowie endlich von b und a. Umgekehrt schließt man, daß ein Divisor von a und b auch ein Divisor von $c, d, \ldots, h$ ist, und daher nicht mehr als h sein kann.

Wenn zwei Zahlen einen gemeinschaftlichen Divisor über 1 nicht haben, so heißen sie prim zu einander (primi inter se, relative Primzahlen). Wenn h der größte gemeinschaftliche Divisor von a und b ist, so sind die Zahlen $a : h$ und $b : h$ prim zu einander. Insbesondere sind je zwei folgende natürliche Zahlen, a und $a + 1$, relative Primzahlen. Eucl. VII. 1.

Anmerkung. Wenn der Zähler und der Nenner eines Bruches nicht prim zu einander sind, so ist der Bruch reducibel und erhält seinen einfachsten Ausdruck, indem der Zähler und der Nenner durch ihren größten gemeinschaftlichen Divisor dividirt werden (§. 11, 2). Wenn der Zähler und der Nenner relative Primzahlen sind, so ist der Bruch irreducibel.

Um den größten gemeinschaftlichen Divisor mehrerer Zahlen $a, b, c, \ldots$ zu finden, berechnet man den größten gemeinschaftlichen Divisor h

von a und b, den größten gemeinschaftlichen Divisor h' von h und c, u. s. w. Jede Zahl, welche in a, b einzeln aufgeht, ist ein Divisor von h; jede Zahl, welche in a, b, c einzeln aufgeht, ist ein gemeinschaftlicher Divisor von h und c, also ein Divisor von h', u. s. w.

4. Wenn a und b prim zu einander sind, so geht jeder gemeinschaftliche Divisor von ak und b in k auf, und wenn zugleich ak durch b theilbar ist, so ist k durch b theilbar.

Beweis. Unter der Voraussetzung, daß a prim zu b ist, wird in der Kette von Gleichungen (3) der letzte Rest $h = 1$, folglich

$$ak = pbk + ck$$
$$bk = qck + dk$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$fk = tgk + k.$$

Hieraus schließt man (2), daß ein gemeinschaftlicher Divisor von ak und b in $ck, dk, \ldots, k$ aufgeht. Ebenso schließt man, wenn ak durch b theilbar ist, daß b in $ck, dk, \ldots, k$ aufgeht.

5. Die gemeinschaftlichen Dividuen von a und b d. h. die Zahlen, welche sowohl durch a als auch durch b theilbar sind, sind von der Form $a \frac{b}{h} x$, wenn durch h der größte gemeinschaftliche Divisor von a und b bezeichnet wird. Ist nämlich $a = h\alpha$, $b = h\beta$, und ak durch b theilbar, so ist auch αk durch β theilbar; nun ist α prim zu β (3), folglich k durch β theilbar (4), d. h. $k = \beta x$, $ak = a\beta x$.

Die gemeinschaftlichen Dividuen von a, b, c sind von der Form $a \frac{b}{h} \frac{c}{h} x$, wenn durch h' der größte gemeinschaftliche Divisor von $a \frac{b}{h}$ und c bezeichnet wird. U. s. w.

Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von a und b ist darnach $a \frac{b}{h}$, der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von a, b, c ist $a \frac{b}{h} \frac{c}{h'}$, u. s. w. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus der relativen Primzahlen a und b ist ab. Und wenn eine Zahl durch die relativen Primzahlen a und b theilbar ist, so ist sie durch das Product derselben theilbar. Eucl. VII, 36 ff.

6. Umgekehrt schließt man: Wenn a und k einzeln prim zu b sind, so ist auch das Product ak prim zu b. Denn ein gemeinschaftlicher Divisor von ak und b würde in k aufgehen (4), also wäre k nicht prim zu b gegen die Voraussetzung. Eucl. VII. 26 ff.

Potenzen relativer Primzahlen sind relative Primzahlen. Wenn a prim zu b, so ist aa prim zu b, und a prim zu bb. Ebenso schließt man, daß a^2 prim zu b^2, b^3, u. s. w.

7. Eine Zahl, welche durch andere Zahlen außer 1 nicht theilbar ist, heißt eine Primzahl (numerus primus). Jede Zahl ist entweder eine Primzahl oder durch Primzahlen theilbar. Eucl. VII, 34.

Beweis. Wenn a keine Primzahl, sondern durch b theilbar ist, so ist b entweder eine Primzahl, oder durch c theilbar, ferner c entweder eine Primzahl oder durch d theilbar, u. s. f. Die Zahlen b, c, d, . . bilden eine fallende Reihe, welche deshalb nur eine endliche Anzahl von Gliedern haben kann und mit einer Primzahl schließt, durch welche jede der vorangehenden Zahlen, also auch a theilbar ist (1).

Anmerkung. Es ist zweckmäßig, die Zahl 1 nicht zu den Primzahlen zu rechnen. Dann sind je zwei Primzahlen ohne Ausnahme prim zu einander. Die einzige gerade Primzahl ist 2. Wenn die Zahl a zwischen r^2 und $(r+1)^2$ liegt, und durch die Primzahlen, welche kleiner als r sind, nicht theilbar ist, so ist sie eine Primzahl. Gesetzt a wäre durch die Primzahl $r+s$ theilbar, so wäre $a=(r+s)x$ durch x theilbar. Nun ist

$$x=\frac{a}{r+s}<\frac{(r+1)^2}{r+s}<r+1,$$

d. h. entweder eine Primzahl, die r nicht übersteigt, oder durch eine solche theilbar. Also wäre a durch eine Primzahl unter r theilbar, gegen die Voraussetzung; folglich kann a durch eine Primzahl über r nicht theilbar sein.

8. Die natürliche Zahlenreihe enthält unendlich viel Primzahlen. Eucl. IX, 20.

Beweis. Bedeutet p die höchste bekannte Primzahl, A das Product der bekannten Primzahlen 2, 3, 5, 7, . ., p, so ist $A+1$ entweder eine Primzahl über p oder durch eine Primzahl über p theilbar. Denn A ist durch jede der Primzahlen von 2 bis p theilbar; $A+1$ ist prim zu A (3), mithin durch keine der Primzahlen vou 2 bis p theilbar. Wenn nun $A+1$ eine Primzahl nicht ist, so ist sie durch eine Primzahl theilbar, welche p übersteigt. Demnach ist keine gegebene Primzahl die letzte Primzahl in der Reihe der natürlichen Zahlen.

Anmerkung. Für die Aufeinanderfolge der Primzahlen ist ein allgemeines Gesetz nicht bekannt. Es giebt kein aus Potenzen einer Unbestimmten gebildetes Polynomium, das nur Primzahlen umfaßte. Z. B. die Formel $41-x+x^2$ enthält 40 Primzahlen (Euler Hist. de l'Acad. de Berlin 1772 p. 36). Wenn aber $a+bx+cx^2$

für $x = m$ eine Primzahl p ergiebt, so hat für $x = m + py$ dieselbe Formel den Werth

$$a + b(m + py) + c(m + py)^2$$
$$= a + bm + cm^2 + bpy + 2cmpy + cp^2y^2$$
$$= p + (b + 2cm)py + cp^2y^2,$$

der durch p theilbar, also keine Primzahl ist (Legendre Théorie des nombres Introd. 20).

9. Eine Zahl, welche durch andere Zahlen außer 1 theilbar ist, kann als Product von bestimmten Primzahlen (einfachen Factoren) dargestellt werden und heißt zusammengesetzt aus diesen Primzahlen. Die allgemeine Formel einer aus den Primzahlen $a, b, c, ..$ zusammengesetzten Zahl ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma ...$

Eine aus den Primzahlen $a, b, c, ..$ zusammengesetzte Zahl ist durch eine andere Primzahl p nicht theilbar, mithin aus andern Primzahlen nicht zusammensetzbar. Denn jede der Zahlen $a, b, c, ..$ ist prim zu p, folglich ist auch das Product $a^\alpha b^\beta c^\gamma ..$ prim zu p (6).

10. Wenn die Zusammensetzung gegebener Zahlen aus Primzahlen bekannt ist, so läßt sich ohne Weiteres erkennen, ob eine der Zahlen durch eine andere theilbar ist, welches ihr kleinster gemeinschaftlicher Dividuus ist, welches ihr größter gemeinschaftlicher Divisor ist, ob dieselben Potenzen sind.

Die Zahl N ist durch N_1 theilbar, wenn N_1 weder andere einfache Factoren, noch einen derselben in größerer Anzahl hat als N. Wenn nämlich ab durch $a_1 b_1$ theilbar ist, während a_1 in a aufgeht und b_1 prim zu a ist, so ist b durch b_1 theilbar. Denn es sei $a = a_1 c$, also ist auch cb durch b_1 theilbar und b_1 prim zu c, folglich geht b_1 in b auf (4). Z. B. $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ ist durch $24 = 2^3 . 3$ theilbar, nicht durch $48 = 2^4 . 3$, nicht durch $63 = 3^2 . 7$. Ein irreducibler Bruch kann nur dann in einen endlichen Decimalbruch verwandelt werden, wenn sein Nenner von der Form $2^\alpha . 5^\beta$ ist.

Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus von $N, N_1, N_2, ..$ wird gefunden, indem man jedem von den einfachen Factoren dieser Zahlen unter den Exponenten, die er in $N, N_1, N_2, ..$ hat, den größten giebt und das Product dieser Potenzen bildet. Z. B. $3 . 5 . 7$, $2^3 . 7$, $2 . 3^2$, $2^3 . 3$ haben den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus $2^3 . 3^2 . 5 . 7$.

Der größte gemeinschaftliche Divisor von $N, N_1, N_2, ..$ wird gefunden, indem man die einfachen Factoren auswählt, welche $N, N_1, N_2, ..$ gemein haben, jedem derselben unter den Exponenten, die er in $N, N_1, N_2, ..$ hat, den kleinsten giebt und das Product dieser Potenzen

bildet. Z. B. $2^2 . 3^4 . 5$ und $2^5 . 3^3 . 7$ haben den größten gemeinschaftlichen Divisor $2^2 . 3^3$.

Wenn a, b, c Primzahlen bedeuten, und $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ die $m$te Potenz einer Zahl k ist, so sind α, β, γ durch m theilbar. Giebt es z. B. α_1 Factoren a in der Zahl k, so enthält k^m deren $\alpha_1 m$, d. h. eine durch m theilbare Anzahl, u. s. f.

Wenn f, g, h relative Primzahlen bedeuten, und fgh eine $m$te Potenz ist, so sind f, g, h ebenfalls $m$te Potenzen. Denn ein einfacher Factor kann in fgh nicht einen andern Exponenten haben, als in einer der Zahlen f, g, h, welche prim zu einander sind.

11. Wenn von einer Zahl ihre Zusammensetzung aus Primzahlen bekannt ist, so lassen sich ohne Weiteres alle Divisoren der Zahl angeben. Bedeuten a, b, c, . . Primzahlen, so ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ durch alle Glieder des Products

$$(1+a+a^2+..+a^\alpha)(1+a+b^2+..b^\beta)(1+c+c^2+..+c^\gamma)$$

und nur durch solche theilbar. Denn die Glieder dieses Products sind in der Formel $a^r b^s c^t$ enthalten, wobei r, s, t der Reihe nach die Zahlen α, β, γ nicht übersteigen; also ist $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ durch $a^r b^s c^t$ theilbar (10).

Die Anzahl aller Divisoren der Zahl $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ist

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma),$$

weil das erste Polynomium $1+\alpha$, das 2te $1+\beta$, das 3te $1+\gamma$ Glieder hat. Hierbei sind 1 und $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ (die Zahl selbst) als Divisoren der Zahl mitgezählt.

Die Summe aller Divisoren der Zahl ist das Product, durch dessen Entwicklung die Divisoren der Zahl gefunden werden, mithin (§. 11, 5)

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\;\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\;\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}.$$

Z. B. $360 = 2^3 . 3^2 . 5$ hat 4 . 3 . 2 d. i. 24 Divisoren, nämlich

1, 2, 4, 8; 3, 6, 12, 24; 9, 18, 36, 72;
5, 10, 20, 40, 15, 30, 60, 120, 45, 90, 180, 360.

Die Summe derselben ist 15 . 13 . 6 = 1170.

Anmerkung. Eine Zahl ist vollkommen (τελειός, perfectus) genannt worden, wenn sie der Summe ihrer Divisoren (die Zahl selbst ausgeschlossen) gleich ist. Die zur Zeit bekannten vollkommenen Zahlen sind in der Formel $(2^x - 1) . 2^{x-1}$ enthalten, unter der Bedingung, daß $2^x - 1$ eine Primzahl ist*). Z. B. $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ sind Primzahlen, so daß

*) Eucl. VII, def. 22. IX, 36. Vergl. Klügel math. W. V p. 887. Terquem Nouv. Ann. III. Ueber die amicablen Zahlen findet man Näheres bei Klügel math. W. I p. 246, V p. 55.

$$3 \;.\; 2 = 6 = 1 + 2 + 3$$
$$7 \;.\; 4 = 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$
$$31 \;.\; 16 = 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$$

Wenn nämlich $2^x - 1$ eine Primzahl ist, so ist die Summe aller Divisoren von $(2^x - 1) . 2^{x-1}$ mit Einschluß der Zahl selbst

$$(1 + 2^x - 1)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{x-1})$$
$$= 2^x(2^x - 1) = 2(2^x - 1) . 2^{x-1},$$

also nach Ausschluß der Zahl $(2^x - 1) : 2^{x-1}$ gleich derselben Zahl.

Zwei Zahlen sind amicabel genannt worden, wenn jede der Summe der Divisoren der andern (die Zahl selbst ausgeschlossen) gleich ist z. B. 220 und 284.

12. Wenn $p, q, r, \ldots$ die Primzahlen bedeuten, durch welche das Product $ABC \ldots$ theilbar ist, wenn unter den Zahlen $A', B', C', \ldots$ durch $p, p^2, \ldots, q, q^2, \ldots, r, r^2, \ldots, \ldots$ mindestens ebensoviele theilbar sind, als unter den Zahlen $A, B, C, \ldots$, so ist das Product $A'B'C' \ldots$ durch das Product $ABC \ldots$ theilbar *).

Z. B. unter den Zahlen 3, 4, 5, 6, 9 sind 2 durch 2, 1 durch 2^2, 3 durch 3, 1 durch 3^2, 1 durch 5 theilbar.

Unter den Zahlen 12, 18, 45 sind 2 durch 2, 1 durch 2^2, 3 durch 3, 2 durch 3^2, und 1 durch 5 theilbar.

Da die letztern Anzahlen der Reihe nach nicht geringer sind, als die erstern, so ist 12 . 18 . 45 durch 3 . 4 . 5 . 6 . 9 theilbar.

Beweis. Unter den Zahlen $A, B, C, \ldots$ seien α durch p theilbare, β durch p^2 theilbare, γ durch p^3 theilbare u. s. f. Dann ist das Product $ABC \ldots$ zunächst durch p^α theilbar, der gefundene Quotient ist wiederum durch p^β theilbar, der neue Quotient durch p^γ, u. s. w. Das Product $ABC \ldots$ enthält also $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ Factoren p. Von gleicher Bedeutung seien die Anzahlen $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ für die Zahlen $A', B', C', \ldots$ Nun sind nach der Voraussetzung α', β', γ', der Reihe nach nicht geringer als $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, also ist $\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots$ nicht geringer als $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$, d. h. $A'B'C' \ldots$ enthält nicht weniger Factoren p als $ABC \ldots$ Aus denselben Gründen enthält $A'B'C' \ldots$ nicht weniger Factoren $q, r, \ldots$ als $ABC \ldots$ Daher ist $A'B'C' \ldots$ durch $ABC \ldots$ theilbar (10).

13. Wenn eine beliebige Zahl der Reihe 1, 2, 3, .., m durch k, ıd die ganze Zahl des Quotienten $m : k$ durch m' bezeichnet wird, so ıd m' Zahlen der Reihe durch k theilbar, nämlich $k, 2k, \ldots, m'k$:nn ferner die ganze Zahl des Quotienten $m' : k$ durch m'' bezeichnet

*) Die in (12) und (13) enthaltenen Sätze sind von Gauß (Disq. arithm. ö. 127. 41).

wird, so sind m'' Zahlen der Reihe $1, 2, .., m'$ durch k theilbar, mithin sind m'' Zahlen der gegebenen Reihe durch k^2 theilbar. U. s. w.

In der Reihe von ebensoviel folgenden Zahlen $a+1$, $a+2$, .., $a+m$ giebt es mindestens m', höchstens $m'+1$ durch k theilbare Zahlen. Die kleinste durch k theilbare Zahl der Reihe, welche durch $a+c$ bezeichnet wird, kann $a+k$ nicht übersteigen. Also enthält die Reihe die durch k theilbaren Zahlen

$$a+c, \quad a+c+k, \ .., \quad a+c+(m'-1)k$$

und außerdem $a+c+m'k$, wenn c klein genug ist.

Das Product $(a+1)(a+2)..(a+m)$ ist durch das Product $1 \,.\, 2 \ldots m$ theilbar. Wenn nämlich das zweite Product aus den Primzahlen $p, q, r, ..$ zusammengesetzt ist, so sind unter den Zahlen $a+1$, $a+2$, .., $a+m$ mindestens ebensoviele durch $p, p^2, .., q, q^2, .., r, r^2, ..$ theilbar, als unter den Zahlen $1, 2, .., m$, folglich u. s. w. (12). Der Quotient des ersten Products durch das zweite ist eine figurirte Zahl (§. 28), mithin eine Summe von ganzen Zahlen, also auch aus diesem Grunde eine ganze Zahl.

Wenn $m = a+b+c+..$, so ist $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m$ durch das Product

$$1 \,.\, 2 \ldots a \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots b \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots c \ldots$$

theilbar, weil $1 \,.\, 2 \ldots a$ durch $1 \,.\, 2 \ldots a$, $(a+1)..(a+b)$ durch $1 \,.\, 2 \ldots b$, $(a+b+1)..(a+b+c)$ durch $1 \,.\, 2 \ldots c$, u. s. f. theilbar ist. Der Quotient ist durch m theilbar in dem Falle, daß m eine Primzahl ist. Der Quotient ist die Anzahl von Permutationen gewisser Elemente (§. 25, 4) und auch aus diesem Grunde eine ganze Zahl.

14. Wenn die Zahl m die Divisoren $a, b, c, ..$ hat, welche prim zu einander sind (jeder zu jedem der übrigen), so giebt es in der Reihe $1, 2, 3, .., m$

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)..$$

Zahlen, die durch $a, b, c, ..$ nicht theilbar sind*).

Beweis. In der gegebenen Reihe giebt es $\frac{m}{a}$ Zahlen, welche durch a theilbar sind, nämlich $a, 2a, 3a, .., \frac{m}{a}a$, folglich bleiben

$$m - \frac{m}{a} = m\left(1-\frac{1}{a}\right)$$

Zahlen übrig, welche durch a nicht theilbar sind.

---

*) Euler 1763 Nov. Comm. Petrop. 8 p. 74. Acta Petrop. 4, II p. 18. 8 p. 17. Vergl. Gauß Disq. arithm. 38. Dirichlet Zahlentheorie von Dedekind §. 11 ff.

Unter den durch a nicht theilbaren Zahlen der gegebenen Reihe hat man diejenigen noch auszuscheiden, welche durch b theilbar sind. Es giebt aber in der Reihe

$$b,\quad 2b,\quad 3b,\quad ..\ \frac{m}{b}b$$

ebensoviel durch a nicht theilbare Zahlen, als in der Reihe

$$1,\ 2,\ 3,\ ..,\ \frac{m}{b}.$$

Denn b ist prim zu a, folglich kb durch a theilbar oder nicht theilbar, je nachdem k durch a theilbar ist oder nicht theilbar (4). Die letztere Reihe enthält nach dem Obigen $\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$ Zahlen, welche durch a nicht theilbar sind. Nach Ausscheidung derselben bleiben von der gegebenen Reihe

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

Zahlen übrig, welche durch a, b nicht theilbar sind.

Unter den durch a, b nicht theilbaren Zahlen der gegebenen Reihe sind ferner auch noch diejenigen auszuscheiden, welche durch c theilbar sind, und deren es ebensoviel giebt, als es in der Reihe c, $2c$, $3c$, .., $\frac{m}{c}c$ Zahlen giebt, die durch a, b nicht theilbar sind, nämlich $\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$. Nach Weglassung derselben bleiben von der gegebenen Reihe

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)-\frac{m}{c}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$$

Zahlen übrig, die durch a, b, c nicht theilbar sind.

15. Wenn die sämmtlichen Primzahlen, aus welchen die Zahl m zusammengesetzt ist, durch a, b, .., h bezeichnet werden, so giebt es in der Reihe 1, 2, 3, .., m

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)..\left(1-\frac{1}{h}\right)$$

Zahlen, welche durch a, b, .., h nicht theilbar (14), mithin prim zu m sind. Diese Anzahl wird nach Gauß (a. a. O.) in der Arithmetik durch $\varphi(m)$ bezeichnet.

Z. B. $60 = 2^2.3.5$. In der Reihe 1, 2, .., 60 giebt es also

$$\varphi(60) = 60.\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{4}{5} = 16$$

Zahlen, welche prim zu 60 sind, nämlich

1	7	11	13	17	19	23	29
59	53	49	47	43	41	37	31

Wenn m und k relative Primzahlen sind, so sind auch m und $m - k$ relative Primzahlen.

Die Zahl 1 wird als prim zu sich selbst betrachtet, so daß $\varphi(1) = 1$. Eine Primzahl p ist prim zu allen niederen Zahlen, also $\varphi(p) = p - 1$. Wenn a, b, c Primzahlen bedeuten und $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ ist, so findet man

$$\varphi(m) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} (a - 1)(b - 1)(c - 1).$$

Wenn m durch μ ungerade Primzahlen theilbar ist, so ist $\varphi(m)$ durch 2^μ theilbar. Wenn m und n aus denselben Primzahlen zusammengesetzt sind, so kann das Verhältniß $\varphi(m) : \varphi(n)$ durch Potenzen derselben Primzahlen ausgedrückt werden, z. B. $\varphi(360) : \varphi(60) = 6$.

Wenn m und m' relative Primzahlen sind, so hat man

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right) \ldots$$

$$\varphi(m') = m'\left(1 - \frac{1}{a'}\right)\left(1 - \frac{1}{b'}\right) \ldots$$

$$\varphi(mm') = mm'\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a'}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{b'}\right) \ldots$$

folglich $\varphi(mm') = \varphi(m)\, \varphi(m')$, z. B.

$$\varphi(36) = \varphi(4)\, \varphi(9) = 2 \,.\, 6 = 12.$$

16. Wenn δ ein Divisor von m ist, so giebt es $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$ Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \ldots, m$, für welche δ der größte Divisor ist, den sie mit m gemein haben. Denn unter den Zahlen von 1 bis m sind δ, $2\delta, \ldots, \frac{m}{\delta}\delta$ durch δ theilbar. Nun ist aber δ der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen $k\delta$ und $\frac{m}{\delta}\delta$ nur dann, wenn k prim zu $\frac{m}{\delta}$ ist. Also giebt es in der gegebenen Reihe ebensoviel Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ haben, als es Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, \frac{m}{\delta}$ giebt, welche prim zu $\frac{m}{\delta}$ sind, nämlich $\varphi\left(\frac{m}{\delta}\right)$ nach der angenommenen Bezeichnung (15).

Wenn alle Divisoren der Zahl m durch $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ bezeichnet werden, so ist*)

$$\varphi(\delta_1) + \varphi(\delta_2) + \varphi(\delta_3) + \ldots = m.$$

Diese Eigenschaft wird erkannt, indem man die Zahlen $1, 2, \ldots,$

*) Gauß Disq. arithm. 39. Vergl. Dirichlet a. a. O.

m nach dem größten Divisor, welchen sie mit m gemein haben, gruppirt. In die Gruppe derjenigen Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ_1 haben, gehören $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right)$ Zahlen; in die Gruppe derjenigen Zahlen, welche mit m den größten gemeinschaftlichen Divisor δ_2 haben, gehören $\varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right)$ Zahlen, u. s. w. Die Summe dieser Anzahlen $\varphi\left(\frac{m}{\delta_1}\right) + \varphi\left(\frac{m}{\delta_2}\right) + \ldots$ ist m, die Menge der vertheilten Zahlen. Die Reihe $\frac{m}{\delta_1}, \frac{m}{\delta_2}, \ldots$ umfaßt aber alle Divisoren von m.

Diese Abzählung wird durch folgende Rechnung bestätigt. Es sei m aus den Primzahlen a, b, c zusammengesetzt und zwar $m = a^\alpha b^\beta c^\gamma$. Ein Divisor δ dieser Zahl ist von der Form $a^\lambda b^\mu c^\nu$, wenn λ eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \alpha$ bedeutet, μ eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \beta$ und ν eine Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots, \gamma$. Nun ist (15)

$$\varphi(\delta) = \varphi(a^\lambda)\, \varphi(b^\mu)\, \varphi(c^\nu).$$

Also stimmt die Summe aller Werthe von $\varphi(\delta)$, welche zu den einzelnen Werthen von λ, μ, ν gehören, mit dem Product der Reihen

$$\varphi(1) + \varphi(a) + \varphi(a^2) + \ldots + \varphi(a^\alpha)$$
$$\varphi(1) + \varphi(b) + \varphi(b^2) + \ldots + \varphi(b^\beta)$$
$$\varphi(1) + \varphi(c) + \varphi(c^2) + \ldots + \varphi(c^\gamma)$$

überein. Die erste Reihe hat den Werth

$$1 + (a - 1) + a(a - 1) + \ldots + a^{\alpha-1}(a - 1)$$
$$= 1 + (a - 1)(1 + a + \ldots + a^{\alpha-1})$$
$$= 1 + (a^\alpha - 1) = a^\alpha.$$

Die zweite und dritte Reihe haben die Werthe b^β und c^γ. Daher ist die Summe aller Werthe von $\varphi(\delta)$ d. i. das Product der Reihen $= a^\alpha b^\beta c^\gamma = m$.

Beispiel. Die Zahl 60 hat die Divisoren 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

$\varphi(1)$	1	$\varphi(5)$	4	$\varphi(15)$	8
$\varphi(2)$	1	$\varphi(6)$	2	$\varphi(20)$	8
$\varphi(3)$	2	$\varphi(10)$	4	$\varphi(30)$	8
$\varphi(4)$	2	$\varphi(12)$	4	$\varphi(60)$	16

Die Summe dieser Anzahlen ist 60.

17. Jede Zahl a kann durch ein Vielfaches einer gegebenen positiven Zahl k und durch eine Zahl r der Reihe $0, 1, 2, \ldots, k - 1$ ohne Ausnahme und auf eine Weise so dargestellt werden, daß $a = sk + r$.

Wäre zugleich $a = s'k + r'$, so wäre $r - r' = (s' - s)k$ durch k theilbar gegen die über r und r' gemachte Voraussetzung.

Zufolge dieser Darstellung der Zahl a heißt r der Rest von a nach dem Modulus k. Wenn zwei Zahlen a und b nach dem Modul k denselben Rest haben oder nicht, so werden sie congruent oder incongruent nach dem Modul k genannt. Um die Congruenz der Zahlen a und b nach dem Modul k auszudrücken, schreibt man*)

$$a \equiv b, \text{ mod } k.$$

Z. B. $32 \equiv 17$, mod 5, weil 32 und 17 nach dem Modul 5 denselben Rest 2 haben; $23 \equiv -17$, mod 8, weil 23 und -17 nach dem Modul 8 denselben Rest 7 haben. Die nach dem Modul k mit b congruenten Zahlen sind von der Form $b + tk$.

Die Differenz der nach dem Modul k congruenten Zahlen a und b ist von der Form tk d. h. durch den Modul der Congruenz theilbar. Ein gemeinschaftlicher Divisor von a und k geht auch in b auf; der größte gemeinschaftliche Divisor von a und k ist zugleich der größte gemeinschaftliche Divisor von b und k.

Umgekehrt schließt man, daß die Zahlen a und b nach dem Modul k congruent oder incongruent sind, je nachdem ihre Differenz durch k theilbar oder nicht theilbar ist.

18. I. Wenn zwei Zahlen nach dem Modul k congruent sind, so sind sie auch nach jedem Divisor von k congruent. Wenn zwei Zahlen nach den Moduln k, l, m .. congruent sind, so sind sie auch nach dem kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der Moduln congruent (5). Denn nach der Voraussetzung geht k in der Differenz der beiden Zahlen auf, folglich u. s. w.

II. Wenn nach einem Modul die Zahlen a und b, m und n congruent sind, so sind auch die Summen oder Differenzen $a \pm m$ und $b \pm n$, die Producte am und bn, die Potenzen a^c und b^c nach demselben Modul congruent. Denn nach der Voraussetzung geht der Modul sowohl in $a - b$, als auch in $m - n$ auf, folglich u. s. w. (2).

Wenn überhaupt nach einem Modul die Zahlen x und y, a_0 und b_0, a_1 und b_1, a_2 und b_2, .. congruent sind, so sind auch die Polynomien $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ..$ und $b_0 + b_1y + b_2y^2 + ..$ nach demselben Modul congruent.

III. Aus der Congruenz der Vielfachen am und bm nach dem Modul k folgt die Congruenz der Zahlen a und b (nicht nach dem Modul k, sondern nur) nach dem Modul $\frac{k}{\delta}$, wenn durch δ der größte

*) Gauß Disq. arithm. 1 ff. Vergl. Dirichlet Zahlentheorie §. 17.

gemeinschaftliche Divisor von m und k bezeichnet wird. Denn nach der Voraussetzung ist $m(a-b)$ durch k theilbar, also auch $\frac{m}{\delta}(a-b)$ durch $\frac{k}{\delta}$ theilbar; nun ist $\frac{m}{\delta}$ prim zu $\frac{k}{\delta}$, folglich $a-b$ durch $\frac{k}{\delta}$ theilbar (4).

Aus $27 \equiv 12$, mod 5 schließt man $9 \equiv 4$, mod 5.
Aus $120 \equiv 84$, mod 18 schließt man $10 \equiv 7$, mod 3.

19. Alle Zahlen werden nach dem Modul k in k Classen so getheilt, daß die Zahlen einer Classe mit 0, die Zahlen einer andern Classe mit 1, u. s. w., die Zahlen der letzten Classe mit $k-1$ nach dem Modul k congruiren. Zahlen einer Classe sind congruent, Zahlen verschiedener Classen sind incongruent nach dem angenommenen Modul (17). Wählt man aus jeder Classe eine Zahl nach Belieben aus, so hat man ein vollständiges System nach dem Modul k incongruenter Zahlen, wie es z. B. je k folgende Zahlen c, $c+1$, $c+2, \ldots, c+k-1$ bilden.

Wenn die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nach dem Modul k incongruent sind und b prim zu k, so bilden die Zahlen $a+bx_1$, $a+bx_2, \ldots$, $a+bx_k$ wiederum ein vollständiges System incongruenter Zahlen. Wären $a+bx_1$ und $a+bx_2$ congruent nach dem Modul k, so wäre ihre Differenz $b(x_1-x_2)$ durch k theilbar; nun ist b prim zu k, also wäre x_1-x_2 durch k theilbar (4), mithin $x_1 \equiv x_2$, mod k gegen die Voraussetzung.

Wenn δ ein Divisor von k ist, so giebt es $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, k$, für welche δ der größte Divisor ist, den sie mit k gemein haben (16). Also giebt es $\varphi\left(\frac{k}{\delta}\right)$ Classen, die solche Zahlen enthalten, daß δ der größte Divisor ist, welchen sie mit k gemein haben. Insbesondere giebt es $\varphi(k)$ Classen, deren Zahlen prim zu k sind:

20. Die Reste von Producten oder Potenzen werden am einfachsten aus den Resten ihrer Factoren berechnet. Wenn a und a' nach dem Modul k die Reste r und r' haben, so hat aa' nach dem Modul k denselben Rest als rr' d. h. $aa' \equiv rr'$, mod k (18). Und wenn a^α den Rest s hat, so hat $a^{\alpha+1}$ denselben Rest als rs. Z. B. Nach dem Modul 13 haben 217 und 57 die Reste 9 und 5, folglich ist $217 . 57 \equiv 9 . 5 \equiv 6$, und $57^2 \equiv 25 \equiv -1$.

Nach dem Modul 2 ist $a^\alpha \equiv a$, weil beide den Rest 0 oder 1 haben, je nachdem a gerade oder ungerade ist.

Nach dem Modul 5 sind alle Zahlen congruent mit einer der Zahlen 0, 1, — 1, 2, — 2. Nach demselben Modul sind also alle Quadrate congruent mit einer der Zahlen 0, 1, — 1. Daher ist entweder a oder $a^2 - 1$ oder $a^2 + 1$ durch 5 theilbar, mithin ist $a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = a^5 - a$ durch 5 theilbar, d. h. $a^5 \equiv a$, mod 5 und mod 2, folglich auch mod 10. Die 5ten Potenzen haben dieselben Einer als die Zahlen.

Nach dem Modul 13 sind die Potenzen $57, 57^2, 57^3, \ldots$ der Reihe nach congruent mit 5, — 1, — 5, 1 in periodischer Wiederkehr. Nach dem Modul 11 sind $9, 9^2, 9^3, \ldots$ der Reihe nach congruent mit — 2, 4, 3, 5, 1; nach dem Modul 5 sind dieselben Potenzen der Reihe nach congruent mit — 1, 1. Nach dem Modul 12 sind $15, 15^2, 15^3, \ldots$ der Reihe nach congruent mit 3, — 6, — 3, 6.

21. Wenn der Modul eine Primzahl p und der Dignand a durch p nicht theilbar ist, so bilden die Reste der Potenzen $a, a^2, a^3, \ldots$ Perioden von höchstens $p - 1$ Gliedern, indem $a^{p-1} \equiv 1$, $a^p \equiv a, \ldots$, mod p*). Wenn der Modul eine zusammengesetzte Zahl k und a prim zu k ist, so bilden die Reste von $a, a^2, a^3, \ldots$ Perioden von höchstens $\varphi(k)$ d. i. so viel Gliedern, als Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, k$ prim zu k sind, indem $a^{\varphi(p)} \equiv 1$, mod k.

Nach dem Modul 5 hat 3^4 den Rest 1, nach dem Modul 37 hat 5^{36} den Rest 1. Nach dem Modul 7 hat nicht nur 2^6, sondern auch schon 2^3 den Rest 1; nach dem Modul 13 hat 5^{12}, aber auch schon 5^4 den Rest 1. Weil $\varphi(15) = 8$, so ist $2^8 \equiv 1$, mod 15; es hat aber auch schon 2^4 nach dem Modul 15 den Rest 1.

Beweis. Wenn $a, 2a, 3a, \ldots$ nach dem Modul p die Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots$ haben, so sind die Producte $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (p - 1) a^{p-1}$ und $r_1 r_2 r_3 \ldots r_{p-1}$ congruent (18). Weil a prim zu p, so sind die Reste $r_1, r_2, \ldots$ von 0 verschieden und incongruent (19), mithin Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, p - 1$, so daß ihr Product den Werth $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (p - 1)$ hat. Dieser Werth ist prim zu p, folglich (18, III) $a^{p-1} \equiv 1$, mod p. Die Congruenz $a^p \equiv a$, mod p findet auch dann noch statt, wenn a durch p theilbar ist.

Wenn der Modul die zusammengesetzte Zahl k ist, und die Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots k$, welche prim zu k sind und deren es $\varphi(k)$ giebt, durch $k_1, k_2, k_3, \ldots$ bezeichnet werden, wenn ferner die Zahlen $ak_1, ak_2, ak_3,$

*) Fermat's Lehrsatz (1640). Die Ausdehnung dieses Satzes auf zusammengesetzte Moduln hat Euler gefunden Nov. Comm. Petrop. 8. p. 74. Vergl. Gauß Disq. arithm. 50. Der obige einfache Beweis ist von Dirichlet gegeben worden Crelle J. 3 p. 390 und Zahlentheorie §. 19.

. . nach dem Modul k die Reste r_1, r_2, r_3, . . haben, so ergiebt sich wiederum durch Multiplication

$$a^{\varphi(k)} k_1 k_2 k_3 \; . \, . \equiv r_1 r_2 r_3 \; . \, ., \text{ mod } k.$$

Nach der Voraussetzung sind a und k relative Primzahlen, k_1, k_2, k_3, . . incongruente Zahlen, also sind auch r_1, r_2, r_3, . . incongruent, von 0 verschieden und prim zu k, mithin Zahlen der Reihe k_1, k_2, k_3, . ., so daß $r_1 r_2 r_3 \; . \, . \equiv k_1 k_2 k_3 \; . \, .$, u. s. w.

22. Alle durch k nicht theilbaren Quadrate sind nach dem Modul k mit gewissen Zahlen der Reihe 1, 2, . ., $k - 1$ congruent, mit den übrigen nicht. Die erstern Zahlen (und die mit ihnen congruenten Zahlen) heißen die quadratischen Reste von k, die übrigen heißen die quadratischen Nicht-Reste von k*).

Weil $(k \pm x)^2 - x^2$ durch k theilbar ist, so ist

$$(k \pm x)^2 \equiv x^2, \text{ mod } k$$

und man braucht, um die Reste aller Quadrate nach dem Modul k d. h. alle quadratischen Reste von k zu finden, nur die Reste der Quadrate von 1, 2, . ., $\frac{1}{2}(k - 1)$ oder $\frac{1}{2}k$, je nachdem k ungerade oder gerade, aufzusuchen. Der Charakter einer Zahl wird dadurch bestimmt, daß man entscheidet, ob sie zu den (quadratischen) Resten oder zu den Nichtresten von k gehört.

Da $(a + 1)^2 = a^2 + (2a + 1)$ ist, so kann man die Quadrate von 1, 2, 3, . . durch Addition der ungeraden Zahlen bilden, $2^2 = 1^2 + 3$, $3^2 = 2^2 + 5$, u. s. w., und die folgenden Reste aus dem jedesmal vorhergehenden Rest, indem man zu ihm eine ungerade Zahl addirt, ableiten. Z. B. nach dem Modul 13 sind 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 der Reihe nach congruent mit 1, $1 + 3$, $4 + 5$, $9 + 7 \equiv 3$, $3 + 9$, $12 + 11 \equiv 10$; alle Quadrate, in denen 13 nicht aufgeht, congruiren nach dem Modul 13 mit einer der Zahlen 1, 3, 4, 9, 10, 12, welche die (quadratischen) Reste von 13 heißen, während 2, 5, 6, 7, 8, 11 die Nichtreste von 13 sind.

		3	5	7	9	11	13		
14 hat die Reste	1	4	9	2	11	8	7		
Nichtreste	3	5	6	10	12	13			
		3	5	7	9	11	13		
15 hat die Reste	1	4	9	1	10	6	4		
Nichtreste	2	3	5	7	8	11	12	13	14
		3	5	7	9	11	13	15	
17 hat die Reste	1	4	9	16	8	2	15	13	
Nichtreste	3	5	6	7	10	11	12	14	

*) Diese für die Arithmetik wichtige Unterscheidung ist von Euler (Opusc. anal. I p. 263) gemacht worden. Vergl. Gauß Disq. arithm. 94 ff. Dirichlet Zahlentheorie §. 32 ff.

Wenn p eine ungerade Primzahl ist, und wenn a und b Zahlen der Reihe $1, 2, .., \frac{1}{2}(p-1)$ bedeuten, so sind a^2 und b^2 nach dem Modul p incongruent; wäre $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ durch p theilbar, so müßte, weil $a - b$ prim zu p ist, $a + b$ durch p theilbar sein, gegen die über a und b gemachte Voraussetzung. Daher giebt es nicht weniger als $\frac{1}{2}(p-1)$ quadratische Reste von p.

23. Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar ist, so können die Zahlen $1, 2, .., p-1$ so gepaart werden, daß die aus den einzelnen Paaren gebildeten Producte nach dem Modul p mit a congruiren. Wenn insbesondere a ein quadratischer Rest von p ist, so giebt es in der Reihe $1, 2, .., p-1$ zwei zu p sich ergänzende Zahlen, welche mit sich selbst Paare von der angegebenen Art bilden*).

Beispiel. Die quadratischen Reste von 7 sind 1, 2, 4; daher gehört 12 zu den Nichtresten, 9 zu den Resten. Aus den Zahlen 1 bis 6 lassen sich 3 Paare bilden, so daß die aus den Paaren gebildeten Producte nach dem Modul 7 mit 12 congruiren, und 4 Paare, so daß die Producte mit 9 congruiren. In der That sind nach dem Modul 7

$$1 \,.\, 5 \equiv 2 \,.\, 6 \equiv 3 \,.\, 4 \equiv 12,$$
$$1 \,.\, 2 \equiv 3 \,.\, 3 \equiv 4 \,.\, 4 \equiv 5 \,.\, 6 \equiv 9.$$

Beweis. Wenn m eine der Zahlen $1, 2, .., p-1$ bedeutet, also prim zu p ist, so haben die Zahlen $m, 2m, .., (p-1)m$ nach dem Modul p verschiedene Reste aus der Reihe $1, 2, .., p-1$ (19). Einer dieser Reste ist aber auch der Rest von a nach dem Modul p, weil a durch p nicht theilbar ist. Also giebt es unter den Producten $m, 2m, .., (p-1)m$ eines und nicht mehr als eines, das mit a nach dem Modul p congruirt.

Wenn a ein quadratischer Rest von p ist, so giebt es eine und nicht mehr als eine Zahl k der Reihe $1, 2, .., \frac{1}{2}(p-1)$, welche mit sich selbst ein Paar bildet von der Art, daß $k^2 \equiv a$, mod p (22). Zugleich ist dann auch $(k-p)^2 \equiv a$, mod p.

24. Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar ist, so ist

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,...\, (p-1) \equiv \varepsilon a^{\frac{1}{2}(p-1)}$$

wo ε den Werth 1 oder -1 hat, je nachdem a von p ein quadratischer Nichtrest oder ein Rest ist.

Beweis. Wenn a ein Nichtrest von p ist, so lassen sich d' Zahlen $m, m_1, m_2, ..$ der Reihe $1, 2, .., p-1$ mit andern Zahl $n, n_1, n_2, ..$ derselben Reihe dergestalt paaren, daß (23)

$$mn \equiv m_1 n_1 \equiv m_2 n_2 \equiv .. \equiv a, \text{ mod } p.$$

*) Diesen Satz und die Beweise der folgenden Sätze verdankt man Dirichl Crelle J. 3. p. 390.



Aus diesen $\frac{1}{2}(p-1)$ Congruenzen schließt man (18, II)

$$mm_1m_2\,..\,nn_1n_2\,..\equiv a^{\frac{1}{2}(p-1)},\ \text{mod}\ p.$$

Nun ist $mm_1m_2\,..\,nn_1n_2\,..=1\,.\,2\,.\,3\,...\,(p-1)$, u. s. w.

Wenn a ein Rest von p ist, so lassen sich Zahlen $m, m_1, m_2, ..$ der Reihe $1, 2, .., p-1$ nach Ausschluß von zwei bestimmten Zahlen k und $p-k$ mit andern Zahlen $n, n_1, n_2, ..$ derselben Reihe dergestalt paaren, daß $mn\equiv m_1n_1\equiv m_2n_2\equiv ..\equiv a$, mod p. Aus diesen $\frac{1}{2}(p-3)$ Congruenzen folgt

$$mm_1m_2\,..\,nn_1n_2\,..=\frac{1\,.\,2\,.\,3\,...\,(p-1)}{k(p-k)}\equiv -a^{\frac{1}{2}(p-3)},\ \text{mod}\ p.$$

Nun ist $k(p-k)\equiv -k^2\equiv -a$, mod p, folglich durch Multiplication

$$1\,.\,2\,.\,3\,..\,(p-1)\equiv -a^{\frac{1}{2}(p-1)},\ \text{mod}\ p.$$

25. Wenn p eine Primzahl ist, so ist *)

$$1\,.\,2\,.\,3\,...\,(p-1)\equiv -1,\ \text{mod}\ p.$$

Denn 1 gehört zu den quadratischen Resten von p und $1^{\frac{1}{2}(p-1)}=1$, folglich u. s. w. (24). Umgekehrt schließt man, daß p eine Primzahl ist, wenn p in $1\,.\,2\,.\,3\,...\,(p-1)+1$ aufgeht; wäre p durch eine kleinere Zahl q theilbar, so ginge q in $1\,.\,2\,.\,3\,..\,(p-1)$ auf, also nicht in $1\,.\,2\,.\,3\,...\,(p-1)+1$.

Wenn p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar, so ist $a^{\frac{1}{2}(p-1)}$ congruent entweder mit 1 oder mit -1, je nachdem a von p ein quadratischer Rest oder ein Nichtrest ist**). Nach dem eben bewiesenen Satze ist $1\,.\,2\,.\,3\,...\,(p-1)\equiv -1$, folglich u. s. w. (24).

Weil p entweder in $a^{\frac{1}{2}(p-1)}-1$ oder in $a^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$ aufgeht, so geht es immer in dem Product dieser Formeln d. i. $a^{p-1}-1$ auf, wie der Fermat'sche Satz (21) aussagt.

§. 14. Quadrat einer Decimalzahl.

1. Das Quadrat eines Polynomium besteht aus dem Quadrat des ersten Gliedes, dem doppelten Product des ersten Gliedes mit dem zweiten nebst dem Quadrat des zweiten Gliedes, dem doppelten Product der ersten 2 Glieder mit dem dritten nebst dem Quadrat des dritten Gliedes, dem doppelten Product der ersten 3 Glieder mit dem vierten nebst dem Quadrat des vierten Gliedes, u. s. f.

---

*) Wilson's Satz (1770). Vergl. Gauß Disq. arithm. 76.

**) Euler's Satz (Opusc. anal. I p. 263). Ueber die Theilbarkeit von 10^p-1 und 10^p+1 durch die Primzahl $2p+1$ vergl. Euler Hist. de l'Acad. de Berlin 1772 p. 35.

Beweis. Nach §. 9, 5 ist

$$a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b) + c^2$$
$$(a + b + c + d)^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$
$$+ 2(a + b)c + c^2$$
$$+ 2(a + b + c)d + d^2, \text{ u. f. f.}$$

2. Eine Decimalzahl d. i. ein Polynomium bestehend aus Einern, Zehnern, Hunderten u. s. w., und aus Zehnteln, Hunderteln, u. s. w. wird nach obiger Regel quadrirt, indem man das Quadrat der höchsten Stelle in die erste Zeile setzt, dann der Verdoppelung der höchsten Stelle die nächste Stelle anhängt, die so entstandene Zahl mit der zweiten Stelle multiplicirt und das Product in die zweite Zeile 2 Stellen weiter rechts setzt; dann der Verdoppelung der zwei höchsten Stellen die nächste Stelle anhängt, die so entstandene Zahl mit der 3ten Stelle multiplicirt und das Product in die 3te Zeile 2 Stellen weiter rechts setzt, u. s. w., endlich die Zeilen colonnenweise addirt, z. B.

7486^2	= 49..
14	576..
148	11904..
1496	89796
	56040196

Die einzelnen Zeilen sind entstanden aus 7 . 7, 144 . 4, 1488 . 8, 14966 . 6. In dem ersten Product bedeutet jeder Factor Tausende, im zweiten Product Hunderte, im dritten Product Zehner, u. s. f. Daher die obige Regel für die Unterordnung der einzelnen Zeilen. Das Komma wird hinter das Quadrat der Einer gesetzt. Z. B.

$30{,}018^2$	= 900,00..	$0{,}0209^2$	= 0,000400..
60 0	6001..	40	3681
60 02	480224		0,00043681
	901,080324		

Das abgekürzte Verfahren, welches man beim Quadriren ungenauer Decimalzahlen anzuwenden hat, erhellt aus folgenden Beispielen:

$28{,}357^2$	= 4..	$3{,}15806^2$	= 9,..
4	384,..	6 2	61..
56 6	16 89	6 30	3125.
	2 83	6 316	5046
	39		38
	804,11		9,97334

3. Beginnt die Zahl mit der $m$ten Stelle vor dem Komma, so beginnt das Quadrat mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle vor dem Komma.

Beginnt die Zahl mit der $m$tem Stelle nach dem Komma, so beginnt das Quadrat mit der $2m$ten oder $(2m - 1)$ten Stelle nach dem Komma.

Z. B. Das Quadrat	von	3	Tausenden	hat	9	Millionen
"	"	"	4	"	"	16	"
"	"	"	3	Tausendteln	"	9	Milliontel
"	"	"	4	"	"	16	"

§. 15. Quadratwurzel einer Decimalzahl.

1. Quadratwurzel einer Zahl ist die Zahl, deren Quadrat der gegebenen Zahl (Radicandus) gleich ist. Die Quadratwurzel von a wird bezeichnet $\sqrt{a}$. Das Zeichen $\sqrt{\ }$ wurde aus dem Anfangsbuchstaben von radix im 16ten Jahrh. gebildet. Ein Strich, der die Fortsetzung des Wurzelzeichens bildet, ersetzt die Klammern, in welche man den Radicandus einzuschließen hat, wenn er ein Product oder ein Polynomium ist.

$$\sqrt{a}^2 = a, \quad \sqrt{a^2} = a.$$
$$\sqrt{}49 = 7 \text{ weil } 7^2 = 49.$$
$$\sqrt{}0{,}09 = 0{,}3 \text{ weil } 0{,}3^2 = 0{,}09.$$
$$\sqrt{a+b} = \sqrt{}(a+b).$$

2. Ist der Radicandus eine Decimalzahl und beginnt er mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle vor dem Komma, so beginnt die Quadratwurzel mit der $m$ten Stelle vor dem Komma (§. 14, 3).

Beginnt der Radicandus mit der $(2m - 1)$ten oder $2m$ten Stelle nach dem Komma, so beginnt die Quadratwurzel mit der $m$ten Stelle nach dem Komma.

$\sqrt{}38475$ erhebt sich bis in die Hunderte,
$\sqrt{}0{,}007$ " " " Hundertel.

3. Um die Quadratwurzel einer Decimalzahl zu berechnen, z. B. 28573,84521, theilt man dieselbe vom Komma auf- und abwärts in Abtheilungen von je zwei Stellen:

2 | 85 | 73,84 | 52 | 1

und erkennt (2), daß die Wurzel sich in die Hunderte erhebt, also etwa a Hunderte, b Zehner, c Einer, d Zehntel, . . enthält. Die einzelnen Stellen dieser unbestimmten Decimalzahl sind der Reihe nach so zu

bestimmen, daß die Stücke des Quadrats derselben (§. 14, 2) von dem Radicandus subtrahirt kleinste positive Reste übrig lassen.

Zuerst darf a^2 die erste Abtheilung 2 nicht übersteigen, damit das Quadrat der Wurzel vom Radicandus subtrahirt werden kann. Daher $a = 1$. Man subtrahirt a^2, fügt dem Rest 1 die nächste Abtheilung 85 hinzu und bildet die Verdoppelung 2 der ersten Wurzelstelle.

Ferner muß $2b$ weniger als 18 betragen. Daher $b = 18 : 2$, wovon nicht mehr als 6 brauchbar ist, weil schon 27 . 7 mehr als 185 beträgt. Man subtrahirt 26 . 6 von 185, fügt dem Rest 29 die nächste Abtheilung 73 hinzu und bildet die Verdoppelung 32 der 2 ersten Wurzelstellen.

Ferner muß $32c$ weniger als 297 betragen. Daher $c = 297 : 32$, wovon 9 zu nehmen. Man subtrahirt 329. 9 von 2973, fügt dem Rest 12 die nächste Abtheilung 84 hinzu und bildet die Verdoppelung 338 der 3 ersten Wurzelstellen.

Ferner muß $338d$ weniger als 128 betragen. Daher $d = 128 : 338$, wovon 0 zu nehmen. Man braucht 3380 . 0 von 1284 nicht erst zu subtrahiren, fügt aber dem Rest 1284 die nächste Abtheilung 52 hinzu und bildet die Verdoppelung 3380 der 4 ersten Wurzelstellen, u. s. f. nach folgendem Schema:

```
√2|85|73,84|52|1   =   169,007..
 1                     2
 1 85                  32
 1 56                  338
   29 73               3380
   29 61               33806
      12 8452
      10 1409
        2 7043 10
        2 3664 69
          3378 41..
```

Beim Abbruch der Rechnung wird die letzte Stelle der Wurzel um 1 erhöht, wenn dabei ein absolut kleinerer Rest bleibt. Im vorstehenden Beispiel hat die letzte Stelle besser 8 als 7 Einheiten.

Wenn der Radicandus ein echter Decimalbruch ist, so hat die Quadratwurzel 0 Einer, die Zehntel der Wurzel sind die Wurzel der Hundertel des Radicandus; wenn deren auch 0 sind, so sind die Hundertel der Wurzel die Wurzel von den Zehntausendteln des Radicandus, u. s. f.

$\sqrt{0,1} = \sqrt{0,10} = 0,316..$	$\sqrt{0,00003} = 0,00547..$
62	108
9	25
100	500
61	416
3900	8400
3756	7609
144	791..

4. Nachdem man m Stellen der Wurzel (abgesehen von vorausgehenden Nullen) berechnet hat, findet man $m - 1$ bis m folgende Stellen der Wurzel einfacher, indem man den Rest durch die doppelte bekannte Wurzel abgekürzt dividirt. Z. B.

$\sqrt{30} = 5,1772_3$

25	10
500	10 8
416	10 94
8400	
7609	
791	
766	
25	
22	
3	

Für 7910 : 1094 nimmt man 791 : $109,_4$ und berechnet diesen Quotienten so genau als möglich nach den Regeln der abgekürzten Division.

Ist a der Radicandus, b der berechnete Theil von $\sqrt{a}$ und r der Rest, mithin $b^2 + r = a$, und setzt man $b + \frac{r}{2b}$ für die gesuchte Quadratwurzel, so ist der begangene Fehler

$$b + \frac{r}{2b} - \sqrt{a} = \frac{(b + r : 2b)^2 - a}{b + r : 2b + \sqrt{a}} = \frac{r^2}{2b(2b^2 + r + 2b\sqrt{a})}$$

$$= \frac{r^2}{2b(b + \sqrt{a})^2} < \left(\frac{r}{2b}\right)^2 : 2b$$

In dem obigen Beispiele ist $\frac{r}{2b}$ nahe $= 0,007$, $2b$ nahe $= 10$, mithin der Fehler $< 0,000\,005$.

§. 16. Lehrsätze von den Quadratwurzeln.

(Heis §§. 50. 51. 42. 43. 49. 55.)

1. Die Quadratwurzel eines **Products** ist das Product der Wurzeln von den Factoren.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

Beweis. $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ ist das Product der Factoren $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{a}\sqrt{b}$ (§. 4) oder der Factoren $\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}$ (§. 3, 3) d. i. ab, der Radicandus (§. 15, 1).

Weil $12 = 4 \cdot 3$, so ist $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$
Weil $63 = 9 \cdot 7$, so ist $\sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.
Weil $75 = 25 \cdot 3$, so ist $\sqrt{75} = 5\sqrt{3}$, u. s. w.

$$2\sqrt{7} = \sqrt{4}\sqrt{7} = \sqrt{28},\quad \sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15},\quad \sqrt{3}\sqrt{15} = 3\sqrt{5}.$$

Die Brüche $\frac{a}{\sqrt{b}}$ und $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ werden einfacher ausgedrückt, indem man den Nenner und den Zähler des einen mit $\sqrt{b}$, des andern mit $\sqrt{b} - \sqrt{c}$ multiplicirt:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b},\quad \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

2. Die Quadratwurzel eines **Bruches** ist der Quotient der Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Beweis. $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{b}\sqrt{b}} = \frac{a}{b}.$

$$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{15}{21}} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

Die Quadratwurzel eines gemeinen Bruches wird am leichtesten berechnet, nachdem man den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt hat:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{0{,}666\ldots},\ \text{bequemer als}\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Die Quadratwurzel eines allgemeinen Bruches wird am einfachsten dargestellt, indem man den Bruch so umformt, daß der Nenner ein Quadrat wird:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b},\quad \sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{\frac{21}{36}} = \frac{\sqrt{21}}{6}.$$

3. Die Quadratwurzel eines **Polynomium** ist von dem Aggregat der Wurzeln der einzelnen Glieder verschieden.

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

weil $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < a + b < (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$. Es ist aber

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2} = \sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}}$$

also z. B.

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} = \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 - b^2}}$$

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} = \sqrt{2a - 2\sqrt{a^2 - b^2}},$$

woraus durch Addition und Subtraction folgt:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}},$$

$$\sqrt{a-b} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2}}.$$

Beispiel. $\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

a	8	$a^2 - b^2$	4
b	$2\sqrt{15}$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	2
a^2	64	$\frac{1}{2}(a + \sqrt{\ })$	5
b^2	60	$\frac{1}{2}(a - \sqrt{\ })$	3

Die Quadratwurzel eines Polynomium kann gliedweise nach der Methode entwickelt werden, welche zur Berechnung der Quadratwurzel einer Decimalzahl dient (§. 15, 3. Vergl. §. 12, 4).

4. Die Quadratwurzel einer ganzen Zahl ist entweder ganz oder **irrational***) d. h. durch Brüche nicht genau angebbar, aber begrenzbar mit beliebig kleinem Fehler.

Beweis. Wäre $\sqrt{a} = \frac{r}{s}$, ein irreducibler Bruch (§. 13, 3), so wäre $\left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{r^2}{s^2}$ (§. 11, 5) $= a$ (§. 15, 1). Nun ist $\frac{r^2}{s^2}$ irreducibel (§. 13, 6), mithin a keine ganze Zahl gegen die Voraussetzung. Also kann $\sqrt{a}$ durch einen Bruch nicht genau angegeben werden. Zu jeder willkürlich gewählten ganzen Zahl s läßt sich eine bestimmte ganze Zahl r ermitteln, so daß

$$\frac{r}{s} < \sqrt{a} < \frac{r+1}{s}.$$

---

*) ἄλογος ἄῤῥητος, surdus. Das letztere Wort, welches bei Leonardo 1202 [...]ber abaci fol. 160) vorkommt und noch im 18ten Jahrh. gebräuchlich ist, war [ver]muthlich die Uebersetzung der arabischen Uebersetzung des griechischen Kunstwortes. [Di]e Irrationalität ist von der Pythagoreischen Schule bemerkt worden und bei Plato

Dadurch findet man für $\sqrt{a}$ den Näherungswerth $\frac{r}{s}$ mit einem Fehler, der geringer ist als $\frac{1}{s}$.

Anmerkung. Die durch Brüche genau angebbaren Zahlen heißen rational (ῥητός). Die Quadratwurzel einer ganzen Zahl kann ein periodischer Decimalbruch nicht sein, weil dessen Werth rational ist.

5. Jede Quadratwurzel ist zweideutig (biformis), d. h. ihr Werth kann sowohl positiv als negativ genommen werden. Wenn b ein Werth von $\sqrt{a}$ ist, so ist auch $-b$ ein Werth von $\sqrt{a}$, weil $(-b)^2 = b^2$ (§. 9, 2).

$\sqrt{49} = \pm 7$, $\sqrt{a^2} = \pm a$. Das Doppelzeichen wird nöthig, sobald man das Wurzelzeichen nicht mehr schreibt. Das Product von Wurzeln $\sqrt{a}\sqrt{b}$ ist zweideutig wie $\sqrt{ab}$ (1), nur $\sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}^2 = a$ ist eindeutig. Die Summe $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ist vierdeutig.

6. Die Quadratwurzeln negativer Zahlen sind imaginär, d. h. sie können durch Multiplication und Division aus der irreduciblen $\sqrt{-1}$ abgeleitet werden, welche die positive oder negative imaginäre Einheit genannt und durch $\pm i$ bezeichnet wird*). Nach (1) setzt man $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ auch in dem Falle, daß x und y nicht beide positiv sind, also

$$\sqrt{-a} = \sqrt{(-1)a} = \sqrt{-1}\ \sqrt{a} = i\sqrt{a}$$

$$\sqrt{-81} = \pm 9i, \quad \sqrt{-b^2} = \pm ib, \quad \sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}$$

Die Quadratwurzel der negativen Einheit ist irreducibel, weder 1, noch -1, noch eine von 1 oder -1 verschiedene positive oder negative Zahl, weil die Quadrate dieser Zahlen von -1 verschieden sind.

Die aus 1 und -1 durch Multiplication und Division abgeleiteten Zahlen heißen reale Zahlen im Gegensatz zu den aus i und $-i$ abgeleiteten imaginären Zahlen. Die Reihe der realen und die Reihe der imaginären Zahlen haben nur die Null gemein. Bei der nach (1)

Gegenstand mehrfacher Betrachtung. Eine ausführliche Abhandlung über das Irrationale liegt im 10ten Buche von Euclid's Elementen vor. Aus dieser Quelle wurden die obigen Sätze von den Wurzeln abgeleitet.

*) Die imaginären Zahlen sind seit der Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen in Betrachtung gezogen worden. Vergl. Klügel math. W. I, p. 37 ff. Man nannte sie „unmöglich", weil sie durch die realen Zahlen nicht ausgedrückt werden können, gleichwie man vor der Einführung der negativen Zahlen Differenzen mit überwiegenden Subtrahenden als unmöglich (falsae) verwarf. Die Ausdrücke real, imaginär kommen zuerst bei Descartes (Géom. III) vor als Prädicate der Wurzeln von Gleichungen. Das Zeichen i ist von Gauß Disq. arithm. 337 eingeführt worden.

zu verrichtenden Multiplication und Division imaginärer Zahlen hat man zu beachten, daß

$$\begin{array}{llll} & & i^5 = i^4 i & = i \\ i^2 = -1 & & i^6 = i^4 i^2 & = -1 \\ i^3 = i^2 i & = -i & i^7 = i^4 i^3 & = -i \\ i^4 = i^2 i^2 & = 1 & i^8 = i^4 i^4 & = 1 \end{array}$$

u. s. w. Demnach ist ferner

$$\frac{1}{i} = \frac{i^4}{i} = i^3 = -i$$

$$\frac{1}{i^2} = \frac{i^4}{i^2} = i^2 = -1$$

$$\frac{1}{i^3} = \frac{i^4}{i^3} = i, \text{ u. s. w.}$$

7. Die Zahlen, welche die Formel $x + \sqrt{y}$ umfaßt, wenn x eine beliebige reale, y eine beliebige negative reale Zahl bedeutet, sind Binomien von je einem realen und einem imaginären Gliede und werden complexe Zahlen genannt*). Die complexe Formel $a + ib$ umfaßt alle Zahlen, sie enthält die reale Zahl a oder die imaginäre Zahl ib, wenn b oder a verschwindet. Unter der Summe oder Differenz der Complexen $a + ib$ und $c + id$ ist die Complexe $a \pm c + i\,(b \pm d)$ zu verstehen. Die Differenz von zwei Complexen verschwindet nur dann, und die beiden Complexen sind nur dann einander gleich, wenn das reale Glied der einen dem realen Glied der andern und zugleich das imaginäre Glied der einen dem imaginären Glied der andern gleich ist.

Alle Zahlen werden zur Uebersicht auf eine Ebene so gesetzt, daß die Puncte (Oerter) der realen Zahlen auf einer Geraden liegen, die Puncte der positiven Zahlen in der einen Richtung vom Nullpunct aus, die Puncte der negativen Zahlen in der entgegengesetzten Richtung, und daß die Puncte derjenigen Complexen, welche das reale Glied a gemein haben, auf einer andern Geraden liegen, welche die erste Gerade in dem Puncte der Zahl a rechtwinkelig durchschneidet. Die Puncte der imaginären Zahlen befinden sich auf der im Nullpunct errichteten Normale der Geraden, welche die Puncte der realen Zahlen enthält.

Die Größe (absoluter Betrag, Modul) der Complexen $a + ib$ wird

---

*) Die complexen Zahlen waren, obgleich bereits Euler deren Nutzen bei vielen nterſuchungen gezeigt hatte, doch mehr geduldet geblieben als anerkannt, bis Gauß en allgemeinsten Begriff der Zahl gründete und durch Veranschaulichung feststellte. ött. gel. Anz. 1831, April 23. Vergl. Theor. resid. biq. 30, wo die Ausdrücke complexe Zahl, Norm derselben" zuerst vorkommen. Cauchy hatte 1821 (Anal. lgébr. c. 7) die Formeln $a + ib$, $a - ib$ „conjugirt" und die positive Quadratvurzel ihres Products ihren „Modulus" genannt.

durch ihren Abstand vom Nullpunct angegeben, also nach dem Pythagoreischen Satz durch die positive Quadratwurzel von $a^2 + b^2$. Die Complexen $a + ib$, $a - ib$, $- a + ib$, $- a - ib$ sind von gleicher Größe, welche sowohl die Größe von a als auch die Größe von b übertrifft. Auf einem um den Nullpunct beschriebenen Kreis liegen unendlich viel Complexe gleichen Betrags, darunter 2 reale und 2 imaginäre. Die Größe der Differenz $c + id - (a + ib)$ d. i. $c - a + i(d - b)$ ist die Hypotenuse der Catheten $c - a$ und $d - b$, der Abstand des Punctes $c + id$ von dem Punct $a + ib$.

Die Multiplication mit einer complexen Zahl besteht aus den Multiplicationen mit ihren Gliedern, so daß

$$(a + ib)(c + id) = ac + ibc + iad - bd$$
$$= ac - bd + i(bc + ad),$$
$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Die Complexen $a + ib$ und $a - ib$, deren Summe und Product real ist, heißen **conjugirt**; die reale Zahl $a^2 + b^2$, welche durch $a + ib$ und durch $a - ib$ theilbar ist, heißt die **Norm** der conjugirten Complexen $a + ib$ und $a - ib$, das Quadrat ihres Modul. Die Summe der conjugirten Complexen

$$(\alpha + i\beta)(a + ib)^2 + (\alpha - i\beta)(a - ib)^2$$
$$= 2\alpha a^2 - 4\beta ab - 2\alpha b^2 = \frac{2}{\alpha}(\alpha^2 a^2 - 2\alpha\beta ab - \alpha^2 b^2)$$
$$= \frac{2}{\alpha}\left\{(\alpha a - \beta b)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)b^2\right\}$$

enthält ein positives und ein negatives reales Glied.

Die Norm des Products complexer Zahlen ist das Product ihrer Normen, weil $pq \cdot p'q' = pp' \cdot qq'$; in der That ist für das obige Beispiel

$$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Die Division durch eine complexe Zahl kann in die Multiplication mit der conjugirten Zahl verwandelt werden, wenn man durch die Norm dividirt, weil

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Die positive Quadratwurzel einer complexen Zahl ist nach (3)

$$\sqrt{a + ib} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$
$$\sqrt{a - ib} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

wenn die Quadratwurzeln positiv genommen werden.

Die Moduln der Summe und der Differenz von zwei Complexen $a + ib$ und $c + id$ liegen beide zwischen der Differenz und der Summe der Moduln der einzelnen Complexen. Denn

$$(a \pm c)^2 + (b \pm d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \pm 2(ac + bd)$$
$$(ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ad - bc)^2$$

Daher liegt $ac + bd$ zwischen

$$-\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \text{ und } +\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

folglich liegt $(a \pm c)^2 + (b \pm d)^2$ zwischen

$$(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{c^2+d^2})^2 \text{ und } (\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2})^2.$$

Anmerkung. Ueberhaupt werden die verschiedenen Werthe einer mehrdeutigen irrationalen Formel conjugirt genannt. Die rationale Formel, welche durch eine gegebene irrationale Formel und alle conjugirten Werthe derselben und nur durch diese theilbar ist, heißt die Norm der irrationalen Formel. Z. B. $a + \sqrt{x}$ und $a - \sqrt{x}$ sind conjugirte irrationale Formeln, deren Norm $a^2 - x$. Vergl. Algebra §. 10.

§. 17. Lehrsätze von den Potenzen.

(Heis §§. 36. 37. 38. 34. 35. 39.)

1. Um ein Product zu potenziren, hat man jeden Factor desselben zu potenziren:

$$(ab)^m = a^m\, b^m$$

Denn $(ab)^m$ ist das Product von m Factoren ab (§. 4) in beliebiger Ordnung (§. 3, 3), also das Product von m Factoren a mit m Factoren b.

Anmerkung. Hiernach werden negative und imaginäre Zahlen potenzirt. Weil $-a = (-1)a$, so ist $(-a)^m = (-1)^m a^m$. Die Potenzen von -1 sind 1 oder -1, je nachdem der Exponent gerade oder ungerade (§. 9, 3). Ebenso hat man $(ia)^m = i^m a^m$. Vergl. §. 16, 6.

2. Um einen Bruch zu potenziren, hat man den Zähler und den Nenner desselben zu potenziren:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Denn die gesuchte Potenz ist das Product von m Factoren $\frac{a}{b}$ d. i. das Product von m Factoren a dividirt durch das Product von m Factoren b (§. 11, 5).

Insbesondere ist

$$\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b^m}$$

3. Um eine **Potenz zu potenziren**, hat man den Exponenten derselben zu multipliciren:

$$(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$$

Denn die gesuchte Potenz ist das Product von c Factoren a^b, also von bc Factoren a, weil a^b das Product von b Factoren a ist. Ebenso ist $(a^c)^b$ das Product von cb $(= bc)$ Factoren a.

Dagegen bedeutet a^{b^c} eine Potenz, deren Dignandus a und deren Exponent b^c ist.

4. Um Potenzen desselben Dignandus zu multipliciren, hat man ihre Exponenten zu addiren:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Denn das gesuchte Product hat $m + n$ Factoren a.

5. Um eine Potenz durch eine Potenz desselben Dignandus zu dividiren, hat man den Exponenten des Divisor von dem Exponenten des Dividendus zu subtrahiren:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$$

Wenn $m > n$, so kann man den Dividendus und den Divisor durch a^n dividiren und behält $m - n$ Factoren a. Wenn $m = n$, so ist der Quotient 1. Wenn $m < n$, so kann man den Dividendus und den Divisor durch a^m dividiren und behält im Dividendus 1, im Divisor $n - m$ Factoren a.

6. Die Potenz a^{m-n} wird durch den Quotienten $a^m : a^n$ auch dann erklärt, wenn der Exponent null oder negativ ist. Hiernach ist

$$a^0 = a^{m-m} = a^m : a^m = 1$$

unter Voraussetzung eines endlichen Dignanden a (§. 11, 8). Und

$$a^{-k} = a^{m-(m+k)} = \frac{a^m}{a^{m+k}} = \frac{1}{a^k} = \left(\frac{1}{a}\right)^k$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$$

d. h. um mit einer ganzen Zahl zu potenziren, kann man den reciproken Dignanden mit der entgegengesetzt gleichen Zahl potenziren.

7. Die Sätze (1) bis (5) über die Rechnung mit Potenzen gelt auch dann, wenn die Exponenten negativ sind*).

*) Die erste Spur einer Rechnung mit Exponenten findet sich in Archimede ψαμμιτης 10. Vergl. Nesselmann Alg. d. Griechen p. 124. Negative Exponenten

$$(ab)^{-m} = a^{-m} b^{-m}, \text{ weil } \left(\frac{1}{ab}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{a^{-m}}{b^{-m}}, \text{ weil } \left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{1:a}{1:b}\right)^m = \left(\frac{1}{a}\right)^m : \left(\frac{1}{b}\right)^m$$

$$(a^b)^{-c} = a^{-bc}, \text{ weil } \left(\frac{1}{a^b}\right)^c = \frac{1}{a^{bc}}$$

$$a^m a^{-n} = a^{m-n}, \text{ weil } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-m} a^{-n} = a^{-(m+n)}, \text{ weil } \left(\frac{1}{a}\right)^m \left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^{m+n}$$

§. 18. Die Wurzel.

(Heis §§. 41. 42. 43. 45. 46. 44. 47. 48.)

1. Die $m$te **Wurzel** einer Zahl ist die Zahl, welche mit m (dem **Wurzel-Exponenten**) potenzirt die gegebene Zahl (den **Radicandus**) giebt, so daß

$$\text{Wurzel}^{\text{W. Expon.}} = \text{Radicandus}, \quad \sqrt[m]{a}^{\,m} = a.$$

Der Wurzelexponent wird über das Wurzelzeichen (§. 15, 1) geschrieben*). Die 2te Wurzel heißt Quadratwurzel, der Wurzelexponent 2 wird weggelassen; die 3te Wurzel heißt Cubikwurzel.

$$\sqrt[3]{8} = 2, \text{ weil } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[4]{10000} = 10, \text{ weil } 10^4 = 10000$$

$$\sqrt[m]{a^m} = a, \quad \sqrt[m]{a^{mn}} = a^n.$$

Um die 3te, 5te, . . Wurzel einer Decimalzahl zu berechnen, kann man von der Betrachtung der 3ten, 5ten, . . Potenz einer Decimalzahl ausgehen, und ähnlich wie in §. 14 und 15 verfahren. Leichtere Mittel zur Erreichung dieses Zwecks innerhalb gegebener Rechnungsgrenzen bieten die Logarithmen dar.

---

at zu demselben Zweck Stifel (arithm. fol. 250) angewendet. Noch weiter gingen Stevin 1585 (Klügel math. W. I. p. 43) und die Erfinder der Logarithmen. Der mfassendere Begriff der Potenz ist besonders von Newton ausgebildet worden. ergl. dessen Brief für Leibniz 1676 Jun. 13.

*) Besondere Wurzelzeichen kommen noch im Anfang des 16ten Jahrh. z. B. bei hrist. Rudolff vor, während Andere bereits anfingen, den Exponenten neben oder er das Wurzelzeichen zu setzen.

2. Wenn der Wurzelexponent ein Product *rs* ist, so kann die Wurzel reducirt werden, indem man die *s*te Wurzel der *r*ten Wurzel oder die *r*te Wurzel der *s*ten Wurzel des Radicandus nimmt:

$$\sqrt[rs]{a} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}} = \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}$$

Denn nach §. 17, 3 hat man

$$\overline{\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}}^{rs} = \left(\overline{\sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}}^{s}\right)^{r} = \overline{\sqrt[r]{a}}^{r} = a$$

$$\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}, \quad \sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}}, \quad \sqrt[15]{a} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}$$

$$\sqrt[rs]{a^{rt}} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a^{rt}}} = \sqrt[s]{a^{t}}$$

d. h. die Wurzel einer Potenz bleibt unverändert, wenn man beide Exponenten durch dieselbe Zahl dividirt oder mit derselben Zahl multiplicirt.

3. Die Wurzel eines **Products** ist das Product der Wurzeln der einzelnen Factoren:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}.$$

Denn nach §. 17, 1 ist

$$\left(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\right)^{m} = \overline{\sqrt[m]{a}}^{m}\,\overline{\sqrt[m]{b}}^{m} = ab.$$

4. Die Wurzel eines **Bruches** ist der Quotient der Wurzel des Zählers durch die Wurzel des Nenners:

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Denn nach §. 17, 2 ist $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^{m} = \frac{\overline{\sqrt[m]{a}}^{m}}{\overline{\sqrt[m]{b}}^{m}} = \frac{a}{b}$.

Man kann den gegebenen Bruch so umformen, daß sein Nenner eine *m*te Potenz wird, und erhält

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{ab^{m-1}}{b^{m}}} = \frac{\sqrt[m]{ab^{m-1}}}{b}, \quad \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}.$$

Ein Bruch mit dem Nenner $\sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{c}$ kann den Nenner $b - c$ oder $b + c$ erhalten, je nachdem *m* gerade oder ungerade ist (§. 12, 5).

Wenn r und s relative Primzahlen, x und y aber solche Zahlen sind, daß $rx - sy = 1$, so hat man

$$\sqrt[rs]{a} = \sqrt[rs]{a^{rx-sy}} = \sqrt[rs]{(a^{rx} : a^{sy})} = \sqrt[rs]{a^{rx}} : \sqrt[rs]{a^{sy}} = \sqrt[s]{a^x} : \sqrt[r]{a^y}$$

5. Die $m$te Wurzel einer $n$ten Potenz kann reducirt werden, indem man die $m$te Wurzel des Dignanden mit n potenzirt, oder indem man den Exponenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt:

$$\sqrt[m]{a^n} = \overline{\sqrt[m]{a}}^{\,n} = a^{\frac{n}{m}}$$

Denn nach §. 17, 3 ist

$$\left(\overline{\sqrt[m]{a}}^{\,n}\right)^m = \left(\overline{\sqrt[m]{a}}^{\,m}\right)^n = a^n$$

Und unter der Voraussetzung, daß m in n aufgeht, ist

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m}m} = a^n$$

6. Die Potenz $a^{\frac{n}{m}}$ wird durch die Wurzel $\sqrt[m]{a^n}$ auch dann erklärt, wenn der Exponent gebrochen ist, also m in n nicht aufgeht. Hiernach kann man die frühern Sätze von den Potenzen mit ganzen Exponenten (§. 17) auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten aufstellen, und somit die bisherigen Sätze von den Wurzeln als besondere Fälle jener Sätze von den Potenzen nachweisen*).

Wenn m und n durch c theilbar sind, so ist

$$a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n:c}{m:c}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:c]{a^{n:c}}.$$

Wenn $n = mq + r$, so ist $a^{\frac{n}{m}} = a^{q+\frac{r}{m}} = a^q a^{\frac{r}{m}}$ übereinstimmend mit $\sqrt[m]{a^{mq+r}} = \sqrt[m]{a^{mq} a^r} = \sqrt[m]{a^{mq}} \sqrt[m]{a^r} = a^q \sqrt[m]{a}$. Ferner ist

$$(ab)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} b^{\frac{1}{m}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$$

$$(a : b)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} : b^{\frac{1}{m}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} \text{ übereinstimmend mit } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

---

*) Die Wurzeln sind als Potenzen mit gebrochenen Exponenten von Stevin Newton aufgefaßt worden. Vergl. §. 17, 7.

$a^{\frac{1}{m}} a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}}$ übereinstimmend mit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[mn]{a^n}\sqrt[mn]{a^{-m}}$
$= \sqrt[mn]{a^n a^{-m}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$.

Anmerkung. Die Wurzeln von Zahlen über 1 betragen mehr als 1, die Wurzeln von Zahlen unter 1 betragen weniger als 1. Die 2te, 3te, 4te, . . Wurzel einer Zahl über oder unter 1 bilden eine bis zu 1 fallende oder steigende Reihe, weil

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n+1]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} : \sqrt[n(n+1)]{a^n} = \sqrt[n(n+1)]{a}$$

In der That, bei hinreichend großem m ist $\sqrt[m]{c} - 1$ und $1 - \sqrt[m]{d}$ beliebig klein (§. 12, 6), also $\sqrt[m]{a}$ d. i. $a^{\frac{1}{m}}$ von 1 oder a^0 nicht beträchtlich verschieden.

7. Die Wurzeln ganzer Zahlen sind entweder ganz oder irrational (§. 16, 4). Wäre $\sqrt[m]{a}$ ein irreducibler Bruch $\frac{r}{s}$, so wäre $\left(\frac{r}{s}\right)^m = \frac{r^m}{s^m} = a$. Weil $\frac{r^m}{s^m}$ irreducibel ist (§. 13, 6), so würde a keine ganze Zahl sein gegen die Voraussetzung. Also kann $\sqrt[m]{a}$ durch einen Bruch nicht genau angegeben werden.

8. Die $m$te Wurzel einer realen oder imaginären Zahl (§. 16, 6) ist das Product einer positiven Zahl mit der $m$ten Wurzel der positiven oder negativen realen oder imaginären Einheit. Nach (3) setzt man unter der Bedingung $a = b^m$

$$\sqrt[m]{\pm a} = b\sqrt[m]{\pm 1}, \quad \sqrt[m]{\pm ia} = b\sqrt[m]{\pm i}.$$

Die Wurzeln der verschiedenen Einheiten sind mehrdeutig*) und fallen mit den Wurzeln der Gleichung $x^{4m} - 1 = 0$ zusammen. Vergl. Algebra §. 10.

Zu den Werthen von $\sqrt[m]{1}$ gehört 1 unbedingt, weil $1^m = 1$; -1, wenn m gerade, weil $(-1)^m$ in diesem Falle 1 ist; $\pm i$, wenn

*) Die Mehrheit der Wurzeln einer Gleichung wurde deutlicher erkannt, nachde die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen gelungen war. Ver Descartes Géom. III. Die $m$ten Wurzeln von 1 und -1 werden zuerst Cotes' Theorem (Harm. mens. 1722. p. 114) angetroffen, welches die Factoren vo $x^{2m} - 1$ geometrisch (goniometrisch) angiebt. Weit schwieriger war die algebraisch Auflösung der Gleichung $x^m - 1 = 0$, welche von Vandermonde (Mém. d Paris 1771. Résol. des équat.) gefördert und von Gauß Disq. arithm. VI Werke II p. 243) vollbracht wurde. Vergl. Lagrange Traité des équat. Note 1

4 in m aufgeht, weil $(\pm i)^m$ in diesem Falle 1 ist. Die Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ befinden sich unter den Werthen von $\sqrt[2m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{-1}^{2m} = \left(\sqrt[m]{-1}^{m}\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Die Werthe von $\sqrt[m]{\pm i}$ befinden sich unter den Werthen von $\sqrt[4m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{\pm i}^{4m} = \left(\sqrt[m]{\pm i}^{m}\right)^4 = (\pm i)^4 = 1.$$

Aus einem Werth von $\sqrt[m]{1}$ findet man nach §. 16, 7 Werthe von $\sqrt[2m]{1}$, $\sqrt[4m]{1}$, ... z. B.

$$\sqrt[8]{1} = \sqrt[4]{-1} = \sqrt{\pm i} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

vierdeutig, die übrigen Werthe sind $-i$, i, -1, 1.

Um die Werthe von $\sqrt[3]{1}$ zu finden, setze man $\sqrt[3]{1} = x$, folglich $x^3 - 1 = 0$. Nun ist $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$. Indem man sowohl $x - 1$ als auch $x^2 + x + 1$ der Null gleichsetzt, erhält man für $x = \sqrt[3]{1}$ außer 1 die Werthe

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}.$$

Für $\sqrt[5]{1}$ findet man aus $x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$, also aus den Gleichungen

$$x - 1 = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

mit Hülfe der Substitution $x + \frac{1}{x} = u$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2$, außer 1 die Werthe

$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)+\tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+\tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)-\tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)-\tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

9. Unter den Werthen der $m$ten Wurzel einer Einheit können solche vorkommen, welche Wurzeln derselben Einheit von g e r i n g e r e m Exponenten sind; z. B. zu den Werthen von $\sqrt[6]{1}$, $\sqrt[9]{1}$, .. gehören die [W]erthe von $\sqrt[3]{1}$, weil $\sqrt[3]{1}^{3k} = 1^k = 1$ ist. Die (complexe) Zahl α [i]st eine e i g e n t l i c h e (primitive) $m$te Wurzel einer Einheit, wenn sie [nic]ht zugleich eine Wurzel derselben Einheit von geringerem Exponenten [ist,] so daß α^k den Radicanden nur dann giebt, wenn m in k aufgeht*).

*) Die Benennung „primitive Wurzel" ist aus der Theorie der Potenzen-Reste [Eu]ler 1773 Nov. Comm. Petrop. 18 p. 89. Vergl. Gauß Disquis. arithm. 57)

$a^{\frac{1}{m}} a^{-\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}}$ übereinstimmend mit $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a^{-1}} = \sqrt[mn]{a^n}\sqrt[mn]{a^{-m}}$
$= \sqrt[mn]{a^n a^{-m}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}}$.

Anmerkung. Die Wurzeln von Zahlen über 1 betragen mehr als 1, die Wurzeln von Zahlen unter 1 betragen weniger als 1. Die 2te, 3te, 4te, . . Wurzel einer Zahl über oder unter 1 bilden eine bis zu 1 fallende oder steigende Reihe, weil

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n+1]{a} = \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}} : \sqrt[n(n+1)]{a^n} = \sqrt[n(n+1)]{a}$$

In der That, bei hinreichend großem m ist $\sqrt[m]{c} - 1$ und $1 - \sqrt[m]{d}$ beliebig klein (§. 12, 6), also $\sqrt[m]{a}$ d. i. $a^{\frac{1}{m}}$ von 1 oder a^0 nicht beträchtlich verschieden.

7. Die Wurzeln ganzer Zahlen sind entweder ganz oder irrational (§. 16, 4). Wäre $\sqrt[m]{a}$ ein irreducibler Bruch $\frac{r}{s}$, so wäre $\left(\frac{r}{s}\right)^m = \frac{r^m}{s^m} = a$. Weil $\frac{r^m}{s^m}$ irreducibel ist (§. 13, 6), so würde a keine ganze Zahl sein gegen die Voraussetzung. Also kann $\sqrt[m]{a}$ durch einen Bruch nicht genau angegeben werden.

8. Die $m$te Wurzel einer realen oder imaginären Zahl (§. 16, 6) ist das Product einer positiven Zahl mit der $m$ten Wurzel der positiven oder negativen realen oder imaginären Einheit. Nach (3) setzt man unter der Bedingung $a = b^m$

$$\sqrt[m]{\pm a} = b\sqrt[m]{\pm 1}, \quad \sqrt[m]{\pm ia} = b\sqrt[m]{\pm i}.$$

Die Wurzeln der verschiedenen Einheiten sind mehrdeutig*) und fallen mit den Wurzeln der Gleichung $x^{4m} - 1 = 0$ zusammen. Vergl. Algebra §. 10.

Zu den Werthen von $\sqrt[m]{1}$ gehört 1 unbedingt, weil $1^m = 1$; -1, wenn m gerade, weil $(-1)^m$ in diesem Falle 1 ist; $\pm i$, wenn

*) Die Mehrheit der Wurzeln einer Gleichung wurde deutlicher erkannt, nachdem die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen gelungen war. Vergl. Descartes Géom. III. Die $m$ten Wurzeln von 1 und -1 werden zuerst in Cotes' Theorem (Harm. mens. 1722. p. 114) angetroffen, welches die Factoren von $x^{2m} - 1$ geometrisch (goniometrisch) angiebt. Weit schwieriger war die algebraische Auflösung der Gleichung $x^m - 1 = 0$, welche von Vandermonde (Mém. de Paris 1771. Résol. des équat.) gefördert und von Gauß Disq. arithm. VII. Werke II p. 243) vollbracht wurde. Vergl. Lagrange Traité des équat. Note 14.

4 in m aufgeht, weil $(\pm i)^m$ in diesem Falle 1 ist. Die Werthe von $\sqrt[m]{-1}$ befinden sich unter den Werthen von $\sqrt[2m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{-1}^{2m} = \left(\sqrt[m]{-1}^m\right)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Die Werthe von $\sqrt[m]{\pm i}$ befinden sich unter den Werthen von $\sqrt[4m]{1}$, weil

$$\sqrt[m]{\pm i}^{4m} = \left(\sqrt[m]{\pm i}^m\right)^4 = (\pm i)^4 = 1.$$

Aus einem Werth von $\sqrt[m]{1}$ findet man nach §. 16, 7 Werthe von $\sqrt[2m]{1}, \sqrt[4m]{1}, \ldots$ z. B.

$$\sqrt[8]{1} = \sqrt[4]{-1} = \sqrt{\pm i} = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}} \pm i \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

vierdeutig, die übrigen Werthe sind $-i, i, -1, 1$.

Um die Werthe von $\sqrt[3]{1}$ zu finden, setze man $\sqrt[3]{1} = x$, folglich $x^3 - 1 = 0$. Nun ist $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$. Indem man sowohl $x - 1$ als auch $x^2 + x + 1$ der Null gleichsetzt, erhält man für $x = \sqrt[3]{1}$ außer 1 die Werthe

$$-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i \sqrt{3}, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i \sqrt{3}.$$

Für $\sqrt[5]{1}$ findet man aus $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$, also aus den Gleichungen

$$x - 1 = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

mit Hülfe der Substitution $x + \dfrac{1}{x} = u$, $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = u^2 - 2$, außer 1 die Werthe

$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)+\tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)+\tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)-\tfrac{1}{4}i\sqrt{10-2\sqrt{5}} \qquad \tfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)-\tfrac{1}{4}i\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

9. Unter den Werthen der $m$ten Wurzel einer Einheit können solche vorkommen, welche Wurzeln derselben Einheit von geringerem Exponenten sind; z. B. zu den Werthen von $\sqrt[6]{1}, \sqrt[9]{1}, \ldots$ gehören die Werthe von $\sqrt[3]{1}$, weil $\sqrt[3]{1}^{3k} = 1^k = 1$ ist. Die (complexe) Zahl α heißt eine eigentliche (primitive) $m$te Wurzel einer Einheit, wenn sie nicht zugleich eine Wurzel derselben Einheit von geringerem Exponenten ist, so daß α^k den Radicanden nur dann giebt, wenn m in k aufgeht*).

*) Die Benennung „primitive Wurzel" ist aus der Theorie der Potenzen-Reste (Euler 1773 Nov. Comm. Petrop. 18 p. 89. Vergl. Gauß Disquis. arithm. 57)

I. Wenn α eine $m$te Wurzel von 1 und k eine beliebige ganze Zahl ist, so ist auch α^k eine $m$te Wurzel von 1, und α^{m+k} von α^k nicht verschieden. Denn $(\alpha^k)^m = (\alpha^m) = 1^k = 1$, $\alpha^{m+k} = \alpha^m \alpha^k = \alpha^k$.

II. Wenn k prim zu m ist, so ist eine von 1 verschiedene $k$te Wurzel von 1 nicht zugleich eine $m$te Wurzel von 1. Man bilde von k nach dem Modul m den Rest p, ferner von m nach p den Rest q, von p nach q den Rest r, u. s. w. Die Reihe dieser Reste geht bis auf 1 herab, weil k prim zu m (§. 13, 3). Eine von 1 verschiedene $k$te Wurzel von 1 wird durch α bezeichnet, so daß $\alpha^k = 1$. Wäre nun zugleich $\alpha^m = 1$, so wäre auch $\alpha^p = 1$, weil

$$\alpha^k = \alpha^{mx+p} = \alpha^{mx}\alpha^p = \alpha^p.$$

Ebenso würde man schließen, daß $\alpha^q = 1$, $\alpha^r = 1$, u. s. w., daß endlich $\alpha = 1$. Dieß ist gegen die Voraussetzung, also kann α^m nicht 1 sein.

III. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 ist, so sind $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^m$ von einander verschieden. Gesetzt, α^r und α^s wären einander gleich, wobei r und s Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots, m$ bedeuten, so wäre $\alpha^r : \alpha^s = \alpha^{r-s} = 1$, mithin α keine eigentliche $m$te Wurzel von 1. Also sind α^r und α^s verschieden.

IV. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 und k prim zu m ist, so ist auch α^k eine eigentliche $m$te Wurzel von 1. Denn $(\alpha^k)^x = \alpha^{kx}$ ist nur dann 1, wenn m in kx aufgeht. Nun ist k prim zu m, also kx nur dann durch m theilbar, wenn m in x aufgeht (§. 13, 4).

V. Wenn α und β eigentliche $m$te und $n$te Wurzeln von 1 sind, und m prim zu n, so ist $\alpha\beta$ eine eigentliche mnte Wurzel von 1 d. h. $(\alpha\beta)^x$ nur dann 1, wenn x durch mn theilbar ist. Ist x durch m theilbar und durch n nicht theilbar, so ist $\alpha^x = 1$, β^x von 1 verschieden, also $(\alpha\beta)^x$ nicht 1. Ist x weder durch m noch durch n theilbar, so sind α^x und $\beta^x = 1 : \beta^{n-x}$ von 1 verschieden. Nun ist α^x eine $m$te Wurzel von 1, und β^{n-x} eine $n$te Wurzel von 1, also α^x von β^{n-x} verschieden (II), folglich $\alpha^x : \beta^{n-x} = \alpha^x \beta_x = (\alpha\beta)^x$ nicht 1.

Z. B. Wenn α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 und m ungerade ist, so ist $-\alpha$ eine eigentliche $2m$te Wurzel von 1, $i\alpha$ eine eigentliche $4m$te Wurzel von 1. Und wenn m durch 3 nicht theilbar ist, so ist $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\alpha$ eine eigentliche $3m$te Wurzel von 1, u. s. w.

übertragen von Meier Hirsch algebr. Gleichungen 1809 §. 88. Zur Verhütun[g] von Mißverständnissen hat Gauß (Werke II, p. 243) den Ausdruck eigentliche (pr[o]pria) Wurzel gewählt. Die folgenden Sätze gründen sich auf die Bemerkunge[n] Euler's (1741 Comm. Petrop. 13 p. 50) und Lagrange's (Mém. de Berli[n] 1770 Réflexions 24. Traité des équat. Note 13).

§. 19. Der Logarithmus.

(Heis §§. 56. 57.)

1. Der a=Logarithmus einer Zahl ist die Zahl, mit welcher a (die Basis) potenzirt die Zahl (den Numerus) giebt, so daß

$$\text{Basis}^{\text{Logarithmus}} = \text{Numerus}.$$

Die Basis wird als positiv real und von 1 verschieden vorausgesetzt. Jede positive Zahl x kann als eine Potenz der Basis a vorgestellt werden, der erforderliche Exponent ist der a=Logarithmus der Zahl x und wird durch ${}^{a}\log x$ bezeichnet.

$${}^{2}\log 32 = 5, \text{ weil } 2^5 = 32.$$
$${}^{3}\log 9 = 2, \text{ weil } 3^2 = 9.$$
$${}^{10}\log 10000 = 4, \text{ weil } 10^4 = 10000.$$
$${}^{5}\log \tfrac{1}{125} = -3, \text{ weil } 5^{-3} = \tfrac{1}{125}.$$
$${}^{a}\log a^m = m, \ {}^{a}\log 1 = 0.$$

Wenn die Basis $a > 1$, so sind die Logarithmen der Numern über 1 positiv, der Numern unter 1 negativ, ${}^{a}\log \infty = \infty$, ${}^{a}\log 0 = -\infty$ (§. 17, 6. §. 11, 8). Wenn die Basis $a < 1$, so sind die Logarithmen der Numern über 1 negativ, der Numern unter 1 positiv, ${}^{a}\log \infty = -\infty$, ${}^{a}\log 0 = \infty$. Die Logarithmen negativer Numern sind nicht real. Wenn der Numerus keine Potenz der Basis ist, so kann man die Wurzeln der Basis zu Hülfe nehmen, um den Logarithmus zu begrenzen (§. 20, 3).

2. Nachdem die Zahlen b und c als Potenzen der Basis a mit Hülfe ihrer a=Logarithmen β und γ dargestellt worden sind,

$$b = a^\beta, \quad c = a^\gamma,$$

so kann c sofort als Potenz der Basis b dargestellt und der b=Logarithmus von c angegeben werden, weil nach §. 18, 6

$$a = b^{\frac{1}{\beta}}, \quad c = a^\gamma = b^{\frac{\gamma}{\beta}}$$

d. h. der b=Logarithmus von c ist der Quotient des a=Logarithmus von c durch den a=Logarithmus der Basis b:

$${}^{b}\log c = \frac{{}^{a}\log c}{{}^{a}\log b}$$

3. Der Inbegriff der Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Basis heißt ein Logarithmensystem. Aus einem Logarithmensystem kann man jedes andere Logarithmensystem ableiten, indem man jeden Logarithmus des gegebenen Systems durch den Logarithmus der Basis des andern Systems dividirt (2). Z. B. die 2=Logarithmen werden erhalten, wenn man die 10=Logarithmen durch ${}^{10}\log 2$ dividirt.

Bei dem gemeinen Rechnen werden die 10-Logarithmen gebraucht, welche deshalb **gemeine Logarithmen** (vulgares, Briggiani, decadische) heißen. Bei ihrer Bezeichnung wird die Basis weggelassen.

In der mathematischen Analysis kommen nur die **natürlichen Logarithmen** (naturales, Neperiani, hyperbolici) in Betracht, deren Basis die irrationale Zahl

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots = 2{,}71828..$$

ist; so genannt, weil sie direct (ohne Begrenzungen) sich berechnen lassen. Vergl. §. 32. Die Bezeichnungen

$$^{e}\log x,\quad \log.\ \text{nat.}\ x,\quad \ln x,\quad \lg x,\quad 1\, x$$

drücken sämmtlich den natürlichen Logarithmus von x aus. Alle andern Logarithmen, z. B. die gemeinen, werden **künstliche Logarithmen** (artificiosi) genannt, weil (2)

$$^{a}\log x = \frac{\log.\ \text{nat.}\ x}{\log.\ \text{nat.}\ a},\quad \log.\ \text{vulg.}\ x = \frac{\log.\ \text{nat.}\ x}{\log.\ \text{nat.}\ 10} = 1\, x \times 0{,}4343$$

Der reciproke natürliche Logarithmus der Basis, mit welchem die natürlichen Logarithmen multiplicirt werden müssen, um künstliche Logarithmen zu werden, heißt der **Modulus des künstlichen Systems***).

Unter Voraussetzung gemeiner Logarithmen ist dagegen

$$\log.\ \text{nat.}\ x = \frac{\log x}{\log e} = \log x \times 2{,}3026$$

4. Der Logarithmus eines **Products** ist die Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren. Für die Basis a ist

$$\log (xy) = \log x + \log y,$$

weil $a^{\log x + \log y} = a^{\log x}\, a^{\log y} = xy$ (§. 18, 6).

Anmerkung. Weil $x = x.1$, $-x = x(-1)$, so ist unter der Voraussetzung $a^z = x$

$$\log x = z + \log 1,\ \log (-x) = z + \log (-1),$$
$$\log (ix) = z + \log i.$$

---

*) Die Logarithmen (numeri rationem exponentes s. rationum compositarum) sind erfunden und benannt von **Neper** (Lord John Napier), der in Mirifici logarithmorum canonis descriptio 1614 die natürlichen Logarithmen der Sinus und Tangenten mittheilte. Das gemeine Logarithmensystem wurde von **Briggs** 1618 eingeführt. Unabhängig von den englischen Erfindungen hat **Byrg** ein künstliches Logarithmensystem construirt (Arithm. und geometr. Progreß-Tabuln, Prag 1620), indem er die Potenzen der Basis 1,0001 berechnete. Byrg's Tabellen enthielten neben den einzelnen Logarithmen die dazu gehörigen Numern, und waren mithin ein Canon antilogarithmicus nach einem von **Wallis** (Algebra c. 12) gebrauchten Ausdruck. Vergl. **Gieswald** über Byrg im Danziger Schulprogramm 1856. Die Quadratur hyperbolischer Sectoren und Segmente mittelst der natürlichen Logarithmen wurde 1668 von **Nic. Mercator** und von **Jac. Gregory** gelehrt. Vergl. **Klügel** math. W. III. p. 531 ff. Der Name „Modulus eines künstlichen Logarithmensystems" ist

Davon hat log 1 den realen Werth 0, während log (— 1) und log i reale Werthe nicht haben. Ist aber α ein (imaginärer) Werth von log i d. h. $a^\alpha = i$, so ist 2α ein Werth von log (— 1), 3α ein Werth von log $(-i)$, 4α ein Werth von log 1, u. s. w. Die Logarithmen sind unendlichdeutig.

5. Der Logarithmus eines **Bruches** ist die Differenz des Logarithmus des Zählers und des Logarithmus des Nenners. Für die Basis a ist

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y,$$

weil $a^{\log x - \log y} = a^{\log x} : a^{\log y} = x : y$.

Die Logarithmen **reciproker Zahlen** sind entgegengesetzt gleich:

$$\log \frac{1}{x} = -\log x, \text{ weil } \log 1 = 0.$$

6. Der Logarithmus einer **Potenz** (im weitern Sinne) ist das Product des Logarithmus des Dignanden mit dem Exponenten. Für die Basis a ist

$$\log x^m = m \log x,$$

weil $a^{m \log x} = (a^{\log x})^m = x^m$.

$$\log x^3 = 3 \log x, \quad \log x^{-4} = -4 \log x$$

$$\log \sqrt[5]{x^2} = \log x^{\frac{2}{5}} = \tfrac{2}{5} \log x$$

§. 20. Die gemeinen Logarithmen der Decimalzahlen.

(Heis §. 58.)

1. Der gemeine Logarithmus einer Decimalzahl besteht aus einer ohne Rechnung sofort angebbaren positiven oder negativen ganzen Zahl, welche die **Kennziffer** oder Charakteristik des Logarithmus heißt, und aus einem echten Decimalbruche, der die **Mantisse** des Logarithmus (mantissa = Zugabe) heißt.

a. Bei positiver Mantisse hat die Kennziffer so viel **positive** Einheiten, als der Numerus Decimalstellen über den Einern hat, oder soviel **negative** Einheiten, als der Numerus Nullen vor der höchsten Decimalstelle hat.

---

von Cotes Philos. Trans. 1714 p. 6 zuerst gebraucht worden. Die jetzt übliche Darstellung der Lehre von den Logarithmen scheint durch Euler 1748 (Introd. I. §. 102 ff.) begründet worden zu sein.

Numerus	Logarithmus
1000	3
100	2
10	1
1	0
0,1	— 1
0,01	— 2
0,001	— 3

Da 185,7 zwischen 100 und 1000 liegt, so besteht log 185,7 aus der Kennziffer 2 und einer positiven Mantisse.

Da 0,0346 zwischen 0,01 und 0,1 liegt, so besteht log 0,0346 aus der Kennziffer — 2 und einer positiven Mantisse (oder auch aus der Kennziffer — 1 und einer negativen Mantisse). Die negative Kennziffer wird nach der positiven Mantisse geschrieben, z. B.

$$0, \ldots - 2 = 1, \ldots - 3 = \ldots = 8, \ldots - 10.$$

b. Umgekehrt schließt man aus der Kennziffer des Logarithmus, bis zu welcher Decimalstelle der Numerus sich erhebt.

Wenn $\log x = 3, \ldots$, so ist $x = \ldots, \ldots$ d. h. x hat 3 Decimalstellen über den Einern. Wenn $\log x = 0, \ldots$, so ist $x = ., \ldots$

Wenn $\log x = 0, \ldots - 1$, so ist $x = 0, \ldots$ d. h. x beginnt mit Zehnteln. Wenn $\log x = 0, \ldots - 4$, so ist $x = 0{,}000 \ldots$ und beginnt mit Zehntausendteln.

2. Die Logarithmen von zwei Zahlen, deren Verhältniß eine Potenz von 10 mit einem ganzen positiven oder negativen Exponenten ist, haben einerlei positive Mantissen und unterscheiden sich nur durch die Kennziffern, z. B.

log 132500, log 1325, log 13,25, log 0,1325, log 0,001325, . .

Beweis. $\log x$ und $\log (x \,.\, 10^k) = \log x + k$ (§. 19) haben dieselbe positive Mantisse, wenn k eine ganze positive oder negative Zahl ist, weil durch die ganze Zahl k nur die Kennziffer verändert wird.

3. Die Logarithmen rationaler Zahlen sind entweder ganz oder irrational. Wäre $\log x$ durch den irreduciblen Bruch $\frac{r}{s}$ genau ausdrückbar, so müßte $10^{\frac{r}{s}}$ rational, und $10^r = 2^r \,.\, 5^r$ eine $s$te Potenz, also r durch s theilbar sein (§. 13, 10).

Um die Mantissen der Logarithmen beliebiger Zahlen zu bestimmen, braucht man nur die Mantissen der Logarithmen solcher Zahlen zu

begrenzen, welche zwischen 1 und 10 liegen, weil z. B. log 3847 und log 3,847 dieselbe Mantisse haben (2).

Diese Begrenzung wird am einfachsten*) erhalten, indem man die Quadratwurzel von 10 berechnet, davon wiederum die Quadratwurzel, u. s. f. bis man auf eine Zahl kommt, welche 1 um einen Decimalbruch von unbeträchtlicher Größe übertrifft (§. 18, 6). Aus den Werthen von $10^{\frac{1}{2}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{1}{8}}$, . . läßt sich folgende Tabelle bilden:

Num.	Log.	Num.	Log.
10,000 00	1,000 00	1,002 25	0,000 98
3,162 28	0,500 00	1,001 12	0,000 49
1,778 28	0,250 00	1,000 56	0,000 24
1,333 52	0,125 00	1,000 28	0,000 12
1,154 78	0,062 50	1,000 14	0,000 06
1,074 61	0,031 25	1,000 07	0,000 03
1,036 63	0,015 62	1,000 04	0,000 02
1,018 15	0,007 81	1,000 02	0,000 01
1,009 04	0,003 91	1,000 01	0,000 00
1,004 51	0,001 95		

Um mit Hülfe dieser Tabelle z. B. log 7,2 zu berechnen, dividire man 7,2 durch den nächst kleinern Numerus der Tabelle 3,16228; den Quotienten 2,27684 durch den nächst kleinern Numerus 1,77828; den Quotienten 1,28036 durch den nächst kleinern Numerus 1,15478, u. s. f. Hiernach wird

$$7{,}2 = 3{,}16228 \times 1{,}77828 \times 1{,}15478 \times \ldots$$

ein Product von Zahlen, deren Logarithmen in der Tabelle enthalten sind. Nach §. 19, 4 ist log 7,2 = log 3,16228 + log 1,77828 + . .

4. Um dieser umständlichen Rechnungen für immer überhoben zu sein, hat man ausführlichere logarithmische Tabellen angefertigt, welche die Mantissen der Logarithmen aller Zahlen bis 999 vierstellig, oder bis 9999 fünfstellig, oder bis 99999 siebenstellig, u. s. f. enthalten**).

I. Wenn der Numerus genauer gegeben ist, als er in der Tabelle verzeichnet steht, so muß die Tabelle interpolirt, d. h. es muß die in der Tabelle enthaltene Mantisse corrigirt werden nach dem Satze:

---

*) Diese Methode rührt von Long her, der sich der 10ten Wurzeln bediente (ilos. Trans. 1714 p. 52).

**) Vierstellige Logarithmen von J. H. T. Müller, 5stellige von Hoüel, llige von Bremiker, 7stellige von Schrön. Um die erste Anfertigung der logamischen Tabellen haben sich besondere Verdienste erworben Ursinus, Keppler, ggs, Blacq u. A. Vergl. Klügel math. W. 3 p. 530 ff.

„Die Mantissendifferenz ist der Numerndifferenz desto genauer proportional, je kleiner das Verhältniß der Numerndifferenz zum Numerus ist.“ Vergl. §. 32 und Algebra §. 2, 4.

Z. B. log 1457 fällt zwischen log 1450 und log 1460, deren Differenz laut Tabelle 30 Zehntausendtel beträgt. Wenn der Numerus um 10, 1, 7 wächst, so wächst der Logarithmus um 30, $\frac{30}{10}$, $\frac{30 \cdot 7}{10}$ Zehntausendtel. Also ist log 1457 = 3,1614 + 0,0021 = 3,1635.

log 14576 wird berichtigt, indem man log 14500 um $\frac{30 \cdot 76}{100^2}$ Zehntausendtel vermehrt. Ebenso findet man mit Rücksicht auf (1) und (2) log 68,707 = 1,8370; log 0,03754 = 0,5745 — 2.

II. Wenn der **Logarithmus** einer Zahl gegeben ist, so läßt sich die Zahl aus derselben **Tabelle** mit bestimmter Genauigkeit angeben.

Z. B. log x = 2,3489. Aus der Kennziffer schließt man, daß x = . . . , . . Die Mantisse fällt laut Tabelle zwischen die Mantissen von log 2230 und log 2240. Wenn die Mantisse um 19, 1, 6 Zehntausendtel wächst, so wächst der Numerus um 10, $\frac{10}{19}$, $\frac{10 \cdot 6}{19}$. Also ist x = 223,3.

log x = 6,1819 giebt x = 1520000 mit unbestimmten Hunderten.
log x = 0,8362 — 3 giebt x = 0,006858.

Wenn log x = — 5,8794 ist, so macht man durch Addition von 6 die Mantisse positiv und subtrahirt wiederum 6. Aus log x = 0,1206 — 6 findet man dann x = 0,000 001 320. Setzt man log y = 5,8794, so erhält man y = 757 500 und (§. 19, 5) $x = \frac{1}{757\,500}$.

§. 21. Berechnung von Formeln mittelst der Logarithmen.

(Heis §. 59.)

1. Zusammengesetztere Formeln werden berechnet, indem man zuerst die Logarithmen derselben und dann die zugehörigen Numern bestimmt. Dieses Verfahren findet am einfachsten bei Producten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln Anwendung (§. 19, 4—6).

28,936 . 0,007803 . 256,84 wird durch folgende Rechnung gefunden:

log 28, . .	1,4615
+ log 0,007 . .	0,8923 — 3
+ log 256, . .	2,4096
log Prod.	1,7634
Prod.	58,00.

1,3802 : 73,257 wird wie folgt berechnet:

log 1,3..	0,1399
— log 73,..	1,8648
log Quot.	0,2751 — 2
Quot.	0,01884

Um der Subtraction willen wird 2 im Minuenden addirt und von der Differenz subtrahirt.

$3{,}428^{27}$ wird wie folgt berechnet:

log 3,..	0,5350 . 27
	10,700
	3 745
log Pot.	14,445
Pot.	279 Billionen.

Größere Genauigkeit wird nur durch genauere Tabellen erreicht.

$\sqrt[7]{0{,}098756^3}$ wird wie folgt berechnet:

log 0,09 . .	(0,9946 — 2) . 3
	2,9838 — 6
	(3,9838 — 7) : 7
log Wurz.	0,5691 — 1
Wurz.	0,3707₅.

Um der Division willen wird der Subtrahendus (die negative Kennziffer) und der Minuendus um gleichviel vermehrt.

$1{,}238^{-5}$ wird wie folgt berechnet:

log 1,2..	0,0927 (—5)
	— 0,4635
log Pot.	0,5365 — 1
Pot.	0,3439.

2. Wenn die Logarithmen der Glieder eines Binomium gefunden sind, so läßt sich der Logarithmus des Binomium direct durch die Gauß'sche Hülfstabelle*) ermitteln. Diese Tabelle enthält zu jedem

*) Das Original dieser Tabelle, durch welche ein von Leonelli (Supplément logarithmique 1802) gemachter Entwurf zur Ausführung gelangte, ist in v. Zach's natl. Corresp. 1812 Nov. Band 26 p. 498 und in v. Vega's math. Tafeln hergegeben von Hülße 1840 enthalten. Mit der Gauß'schen Columne B stimmt die ller'sche Columne S; dagegen giebt die Gauß'sche Tabelle in der Columne C tt der Müller'schen Columne U) die Werthe von $\log\left(1+\frac{x}{y}\right)$, so daß man in er Zeile $C = A + B$ hat.

positiven Werthe von $\log x - \log y$ d. i. $\log \frac{x}{y}$ (Columne A) die zugehörigen Werthe von

$$\log\left(1 + \frac{y}{x}\right) \quad \text{und} \quad \log \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}$$

(Columne S und U). Der erste dieser Werthe zu $\log x$ addirt giebt $\log(x + y)$, der zweite von $\log x$ subtrahirt giebt $\log(x - y)$. Denn (§. 19)

$$\log(x + y) = \log x\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \log x + \log\left(1 + \frac{y}{x}\right),$$

$$\log(x - y) = \log x\left(1 - \frac{y}{x}\right) = \log x - \log \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Wenn die unter A verzeichneten Zahlen eine von 0 an steigende Reihe bilden, so bilden die unter S und U daneben stehenden Zahlen bis auf 0 fallende Reihen, jene von log 2 ab, diese von ∞ ab. Wenn $\log \frac{x}{y}$ wächst, also auch $\frac{x}{y}$, so fällt $\frac{y}{x}$, also auch $\log\left(1 + \frac{y}{x}\right)$; zugleich wächst $1 - \frac{y}{x}$, folglich fällt $\log \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}$. Wenn $\log \frac{x}{y} = 0$ d. h. $\frac{x}{y} = 1$, so ist $\log\left(1 + \frac{y}{x}\right) = \log 2$ und $\log \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}$ unendlich. Ist $\log \frac{x}{y}$ beträchtlich groß, so ist $\frac{x}{y}$ beträchtlich groß, $\frac{y}{x}$ ein kleiner echter Bruch, also sind $\log\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ und $\log \frac{1}{1 - \frac{y}{x}}$ nahe 0.

Z. B. $\log a = 0{,}3177 - 1$; $\log b = 0{,}17325 - 1$. Die Differenz $\log a - \log b = 0{,}14445$ wird in A aufgesucht; daneben findet man in S oder U die Zahl, welche zu $\log a$ addirt oder von $\log a$ subtrahirt $\log(a + b)$ oder $\log(a - b)$ giebt. Das neben $A = 0{,}144$ stehende $S = 0{,}2350$ um $\frac{4 \cdot 45}{100}$ Zehntausendtel und $U = 0{,}5494$ um $\frac{25 \cdot 45}{100}$ Zehntausendtel vermindert giebt die zu $A = 0{,}14445$ gehörigen Werthe $S = 0{,}2348$ und $U = 0{,}5483$, so daß

$$\log(a + b) = 0{,}3177 - 1 + 0{,}2348 = 0{,}5525 - 1,$$
$$\log(a - b) = 0{,}3177 - 1 - 0{,}5483 = 0{,}7694 - 2.$$

Wenn $\log m = -A$, so ist $\log(1 + m) = S$, $\log(1 - m) = -U$.

Berechnung von $\sqrt[16]{\dfrac{43 + 5\sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$

log 43	1,6335	S	0,2453
log 278	2,4440 : 3	log Divd.	1,8788
	0,8147	log 17	1,2304 : 5
log 5	0,6990	log Divſ.	0,2461
		log Quot.	1,6327 : 16
log $5\sqrt[3]{}$	1,5137	log Form.	0,10204
A	0,1198	Form.	1,265

Wenn log tang² $\alpha = c$, log cot² $\alpha = -c$, so findet man log (1 + cot² α) d. i. log $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$, indem man c unter A aufsucht und den nebenstehenden Werth von S nimmt. Bestimmt man α so, daß log tang $\alpha = \frac{1}{2} A$, so giebt -2 log sin α den zu A gehörigen Werth von S. Demnach konnten Gauß' Hülfstabellen aus den vorhandenen Tabellen der Logarithmen der goniometrischen Functionen abgeleitet werden. Durch die Hülfstabellen ist die sonst übliche Benutzung von sogenannten Hülfswinkeln überflüssig gemacht.

§. 22. Die geometrische Progression. Zusammengesetzte Zinsrechnung und Rentenrechnung.

(Heis §. 83. 84.)

1. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine geometrische Progression bilden, wenn die Verhältnisse der auf einander folgenden Größen einander gleich sind. Ist a das Anfangsglied, v das Verhältniß eines andern Gliedes zum vorhergehenden, so ist die geometrische Progression bis zum $n$ten Gliede folgende:

$$a,\ av,\ av^2,\ av^3,\ldots,\ av^{n-1}.$$

Die Progression ist steigend oder fallend, je nachdem das Verhältniß mehr oder weniger als 1 beträgt. Die Glieder der Progression haben abwechselnde Zeichen, wenn das Verhältniß negativ ist.

2. Die Summe der geometrischen Progression ist die Differenz des überletzten und des Anfangs-Gliedes dividirt durch die Differenz des Verhältnisses und 1. Denn aus

$$\begin{aligned} s &= a + av + av^2 + \ldots + av^{n-1} \\ sv &= \phantom{a + {}} av + av^2 + \ldots + av^{n-1} + av^n \end{aligned}$$

folgt durch Subtraction

$$sv - s = av^n - a$$

$$s = \frac{av^n - a}{v - 1} = \frac{a - av^n}{1 - v}$$

in Uebereinstimmung mit §. 12, 5. Ebendaselbst ist auch die Summe der unendlichen fallenden Progression angegeben:

$$a + av + av^2 + \ldots \text{inf.} = \frac{a}{1-v},\ v < 1.$$

3. Wenn ein Capital zu p Procent jährlichen Zinsen angelegt ist, und die Zinsen jährlich capitalisirt d. h. zu Vermehrung des Capitals angewandt werden, so bilden die Werthe des Capitals nach 1, 2, 3, .. Jahren eine geometrische Progression, deren Verhältniß $1{,}0p$ d. i. $1 + \frac{p}{100}$. Denn in 1 Jahre wachsen

100 Einheiten	Cap. zu	$100 + p$	Einheiten
1	" " "	$1{,}0p$	"
c	" " "	$c\,.\,1{,}0p$	"

Aus $c\,.\,1{,}0p$ Einheiten werden wiederum in 1 Jahre $c\,.\,1{,}0p^2$ Einheiten u. s. f.; also erwachsen aus c Einheiten in 1 Jahre $c\,.\,1{,}0p$, in 2 Jahren $c\,.\,1{,}0p^2$, in 3 Jahren $c\,.\,1{,}0p^3$, . ., in n Jahren $c\,.\,1{,}0p^n$ Einheiten.

Wenn das Capital n Jahre und t Tage angelegt ist, so erhalten während des letzten Zeitraums 100 Einheiten den Werth von $100 + \frac{pt}{360}$ Einheiten. Demnach hat das Capital c nach n Jahren und t Tagen den Werth

$$c\,.\,1{,}0p^n\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right).$$

Wenn dagegen die Zinsen nach jedem $m$ten Theile eines Jahres capitalisirt werden, so nehme man den $m$ten Theil des Jahres als Zeiteinheit und vertausche p mit $p : m$. Das Capital c hat nach 1, 2, 3, . . Zeiteinheiten die Werthe

$$c\left(1 + \frac{p}{100m}\right),\ c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^2,\ c\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^3, \ldots$$

4. Mit Hülfe der gefundenen Formeln werden die Aufgaben der zusammengesetzten Zinsrechnung gelöst: den Werth anzugeben, welchen ein Capital bei gegebener Verzinsung nach oder vor gegebener Zeit hat; die Zeit anzugeben, in welcher ein Capital bei gegebener Verzinsung einen bestimmten Werth erhalten hat; die Verzinsung anzugeben, durch welche ein Capital in gegebener Zeit einen bestimmten Werth erreicht.

Wenn das Capital c nach n Jahren und t Tagen bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent den Werth k hat, so hat man (3)

$$k = c \,.\, 1{,}0p^n\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right), \quad c = \frac{k}{1{,}0p^n\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right)},$$

$$1{,}0p^n\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right) = \frac{k}{c}.$$

Die Formeln für k und c sind zu logarithmischer Berechnung bequem. Zur Berechnung von n und t nimmt man die Logarithmen beider Seiten der dritten Gleichung und erhält

$$n \log 1{,}0p + \log\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right) = \log \frac{k}{c}.$$

Hiernach erscheint n als ganze Zahl des Quotienten $\log \frac{k}{c} : \log 1{,}0p$ und $\log\left(1 + \frac{pt}{36\,000}\right)$ als Rest der Division. Ist der Rest $= \log 1{,}0s$, so findet man $1 + \frac{pt}{36\,000} = 1{,}0s$ und $t = \frac{360s}{p}$.

Beispiel. Vor wieviel Jahren hatten 5326,4 Thlr. Capital den Werth 5000 Thlr. bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu 6 Procent? Die Berechnung ist folgende:

$\log k$	3,7264
$\log c$	3,6990
$\log \frac{k}{c}$	0,0274 : 0,0253 = 1 (log 1,0p)
	253
$\log (1 + ..)$	0,0021
$1 + ..$	1,005
t	0,5 . 360 : 6 = 30

Die gesuchte Zeit beträgt 1 Jahr und 30 Tage.

Zur genauen Berechnung von p hat man nur in dem Falle $t = 0$

$$1{,}0p = \sqrt[n]{\frac{k}{c}}.$$

Wenn t nicht verschwindet, so dient der ebenso berechnete Werth von $1{,}0p$ zur Grundlage einer Annäherung.

5. Wenn von dem Capital c (Mise) nach jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent jährlich das Capital r (Rente) weggenommen wird, so bleibt in der Casse

nach 1 Jahr $c \,.\, 1{,}0p - r$

„ 2 „ $c \,.\, 1{,}0p^2 - r \,.\, 1{,}0p - r$

„ 3 „ $c \,.\, 1{,}0p^3 - r \,.\, 1{,}0p^2 - r \,.\, 1{,}0p - r$

. . . .

„ n „ $c \,.\, 1{,}0p^n - r \,.\, 1{,}0p^{n-1} - r \,.\, 1{,}0p^{n-2} - \,..\, - r \,.\, 1{,}0p - r.$

Die Subtrahenden bilden eine geometrische Progression, durch deren Summirung als Cassenbestand nach n Jahren erhalten wird

$$c \,.\, 1{,}0p^n - r\,\frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} = \frac{100r}{p}\left\{1 - \left(1 - \frac{cp}{100r}\right) . \, 1{,}0p^n\right\}$$

$$\text{oder } \frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{cp}{100r} - 1\right) . \, 1{,}0p^n + 1\right\}$$

Wenn jährlich das Capital r hinzugefügt wird, so ist das nach n Jahren angehäufte Capital

$$\frac{100r}{p}\left\{\left(\frac{cp}{100r} + 1\right) . \, 1{,}0p^n - 1\right\}.$$

Beispiel. $c = 10\,000$ Gulden, $p = 5$, $r = 800$ Gulden, $n = 10$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,2041	$\log 1{,}0p^n$	0,2119
		$\log 1{,}0p^n(..)$	$-$ 0,2141 ($- A$)
$\log c$	4,0000	$\log [1 - ..]$	$-$ 0,4098 ($- U$)
$\log \frac{cp}{100r}$	$-$ 0,2041 ($- A$)	log Form.	3,7943
		Form.	6227.
$\log (1 - ..)$	$-$ 0,4260 ($- U$)		

Anmerkung. Wenn bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent nach jedem $m$ten Theile eines Jahres die Rente ϱ gezahlt wird, so ist zur Berechnung des Cassenbestands nach n Jahren zu untersuchen, welche Rente am Schlusse eines Jahres statt der einzelnen während des Jahres fälligen Renten gezahlt werden kann. Statt 100 Einheiten hat man aber $\frac{t}{m}$ Jahr später $100 + \frac{pt}{m}$ Einheiten zu zahlen, für 1 Einheit den 100ten Theil, für ϱ Einheiten ϱmal soviel d. i. $\varrho\left(1 + \frac{pt}{100m}\right)$ Einheiten. Statt der einzelnen Renten während eines Jahres ist also am Schlusse des Jahres die Rente

$$\varrho\left(1 + \frac{p(m-1)}{100m}\right) + \varrho\left(1 + \frac{p(m-2)}{100m}\right) + \,..\, + \varrho\left(1 + \frac{p}{100m}\right) + \varrho$$

zu zahlen. Nun ist die doppelte Summe

$$\begin{array}{l} (m-1) + (m-2) + \,..\, + 2 \quad + 1 \\ \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + \,..\, = (m-2) + (m-1) \end{array}$$

$= m(m-1)$, folglich

$$(m-1) + (m-2) + \,..\, + 2 + 1 = \tfrac{1}{2}m(m-1)$$

also hat die gesuchte Rente den Werth $\varrho\left(m + \frac{m-1}{200}p\right)$. Nachdem man diesen Werth an die Stelle von r gesetzt hat, berechnet man den Cassenbestand wie oben.

6. Wenn man den gefundenen Cassenbestand = 0 setzt, so erhält man die Rentengleichung, welche die Aufgaben der Rentenrechnung löst: die Mise anzugeben, welche bei gegebener Verzinsung durch eine bestimmte Rente aufgezehrt wird; die Rente anzugeben, durch die bei gegebener Verzinsung in bestimmter Zeit eine gegebene Mise aufgezehrt wird; die Dauer einer Rente anzugeben, durch die bei gegebener Verzinsung eine bestimmte Mise aufgezehrt wird; die Verzinsung anzugeben, bei der eine bestimmte Mise durch eine gegebene Rente aufgezehrt wird.

I. und II. Wenn die Mise c durch die $n$jährige Rente r bei jährlicher Capitalisirung der Zinsen zu p Procent aufgezehrt wird, so hat man (5) nach Division durch $1{,}0p^n$

$$c = \frac{100r}{p}(1 - 1{,}0p^{-n}),\quad r = \frac{cp}{100(1 - 1{,}0p^{-n})}.$$

Beispiel 1. $r = 800$; $p = 3{,}5$; $n = 20$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,3590
$\log\ 1{,}0p^{-n}$	$-$ 0,2988 ($-A$)
$\log\ (1 - ..)$	$-$ 0,3033 ($-U$)
$\log\ c$	4,0557; $c = 11370$.

Beispiel 2. $c = 20000$; $p = 3$; $n = 10$.

$\log \frac{pc}{100}$	2,7782
$\log 1{,}0p^{-n}$	$-$ 0,1284 ($-A$)
$\log \frac{1}{1 - ..}$	5918 (U)
$\log r$	3,3700; $r = 2344$.

III. Wenn aus der Mise, der Verzinsung und der Rente die Dauer derselben zu berechnen ist, so setze man (5)

$$\left(1 - \frac{cp}{100r}\right).\,1{,}0p^n = \frac{1}{\alpha},\quad \alpha\,.\,1{,}0p^n = \frac{1}{1 - \frac{cp}{100r}}$$

weil n unter den gemachten Voraussetzungen nur eine ganze Zahl sein kann. Zur Bestimmung von n und α hat man

$$n \log 1{,}0p + \log \alpha = \log \frac{1}{1 - \frac{cp}{110r}}.$$

Demnach ist n die ganze Zahl des Quotienten $\log \frac{1}{1 - ..} : \log 1{,}0p$ und $\log \alpha$ der Rest dieser Division. Nach $n$maliger Auszahlung der Rente r bleibt der Cassenbestand $\frac{100r}{p}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Beispiel. $c = 20\,000$; $p = 3{,}5$; $r = 1200$.

$\log \frac{100r}{p}$	4,5351
$\log c$	4,3010
$\log \frac{cp}{100r}$	— 0,2341 (— A)
	(log 1,0p)
$\log \frac{1}{1 - ..}$	0,3803 (U) : 0,01494 = 25
	2988
	815
	747
$\log \alpha$	0,0068 (A)
$\log \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$	— 1,81 (— U)
$\log \frac{100r}{p} (..)$	2,72 = log 530.

Die Rente dauert 25 Jahre und läßt dann den Cassenbestand 530.

IV. Aus der Mise, der Rente und ihrer Dauer kann die Verzinsung im Allgemeinen nicht berechnet werden. Denn die Rentengleichung (1)

$$\frac{100}{p}(1 - 1{,}0p^{-n}) = \frac{c}{r}$$

oder, nachdem man $\frac{1}{1{,}0p} \equiv x$, $\frac{100}{p} = \frac{x}{1 - x}$ substituirt hat,

$$x \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{c}{r}$$

ist vom $n$ten Grade, weil $1 - x^n$ durch $1 - x$ theilbar ist. Eine Gleichung dieser Art kann aber annäherungsweise aufgelöst werden, wenn bestimmte Werthe von c, r, n gegeben sind (Algebra §. 8). In jedem besondern Falle wird dann p so begrenzt, daß

$$\log \frac{100r}{c} = \log \frac{1 - 1{,}0p^{-n}}{p} = 0.$$

§. 23. Potenzen der Binomien mit positiven ganzen Exponenten.

1. Weil $(a+b)^m = \left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, so kommt es zunächst darauf an, die $m$te Potenz eines Binomium zu entwickeln, dessen erstes Glied 1 und dessen zweites Glied ein echter Bruch ist. Durch Multiplication findet man

$$(1+x)^2 = (1+x)(1+x),\ (1+x)^3 = (1+x)^2(1+x), \ldots$$

$$\begin{aligned}
(1+x)^2 &= 1 + 2x + x^2\\
(1+x)^3 &= 1 + 2x + x^2\\
&\quad\ \ + x + 2x^2 + x^3\\
&= 1 + 3x + 3x^2 + x^3\\
(1+x)^4 &= 1 + 3x + 3x^2 + x^3\\
&\quad\ \ + x + 3x^2 + 3x^3 + x^4\\
&= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4
\end{aligned}$$

u. s. w., also eine nach steigenden Potenzen von x geordnete Reihe. Die Coefficienten (§. 3) der einzelnen Potenzen von x heißen Binomialcoefficienten, der 0te, 1te, 2te, . . bei der $m$ten Potenz des Binomium. Diese sind bei der 2ten, 3ten, 4ten Potenz

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 u. s. f.

Aus der obigen Rechnung folgt, daß die Binomialcoefficienten bei der 5ten Potenz Summen von je zwei folgenden Binomialcoefficienten bei der 4ten Potenz sind, u. s. f.*). Um aber die Binomialcoefficienten bei einer Potenz unabhängig von den Binomialcoefficienten bei niederen Potenzen zu finden, muß man dieselben durch den Exponenten der Potenz ausdrücken. In der That ist bei der 4ten Potenz des Binomium

$$4 = 4,\quad 6 = 4 \cdot \tfrac{3}{2},\quad 4 = 4 \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{2}{3},$$

bei der 5ten Potenz

$$5 = 5,\quad 10 = 5 \cdot \tfrac{4}{2},\quad 10 = 5 \cdot \tfrac{4}{2} \cdot \tfrac{3}{3},\quad 5 = 5 \cdot \tfrac{4}{2} \cdot \tfrac{3}{3} \cdot \tfrac{2}{4}.$$

Danach ist zu prüfen, ob bei der $m$ten Potenz die Binomialcoefficienten

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \ldots$$

sich ergeben, so daß man hätte:

---

*) Eine so construirte Tabelle der Binomialcoefficienten (triangulus arithmeticus bei Pascal) findet sich bereits bei Stifel arithm. 1544 fol. 44.

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \dots$$

Die Bildung der Binominalcoefficienten aus dem Exponenten war durch die von Fermat und Pascal erfundenen Formeln der figurirten Zahlen vorbereitet. Vergl. Fermat's Brief an Roberval 1636 Nov. 4 und Oeuvres de Pascal ed. Lahure 1858, II. p. 443. 452. 403. Die Binomialcoefficienten und das Binomialtheorem für positive ganze sowie für beliebige reale Exponenten hat Newton erfunden und in den Briefen an Oldenburg 1676 Juni 13 und Oct. 24 mitgetheilt. Die Bezeichnung $\binom{m}{k}$ kommt zuerst in nachgelassenen Abhandlungen Euler's vor. Acta Petrop. V, 1 p. 89 und V, 2 p. 76. Nov. Act. V p. 52.

2. Die Zahlen

$$1 \quad m \quad \frac{m(m-1)}{1.2} \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \dots$$

werden der Reihe nach durch

$$\binom{m}{0} \binom{m}{1} \binom{m}{2} \binom{m}{3} \dots$$

bezeichnet. Die Formel $\binom{m}{k}$, zu lesen m über k, bedeutet das Product von k Factoren, die von m in natürlicher Reihe absteigen, dividirt durch das Product von k Factoren, die von 1 aufsteigen,

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots k}$$

und ist eine ganze Zahl (§. 13, 13). Die Formel $\binom{m}{m}$ hat den Werth 1, während $\binom{m}{m+1}$, $\binom{m}{m+2}$, .. verschwinden, weil in ihren Zählern der Factor 0 vorkommt.

Ein Product von Factoren, deren je zwei folgende dieselbe Differenz haben, z. B. $a(a+b)(a+2b)(a+3b)$ u. s. w. (productum continuorum bei Pascal, functio inexplicabilis bei Euler Calc. diff. II c. 16 und 17. Vergl. Oettinger Crelle J. 33 p. 1) wird nach Kramp 1799 eine Facultät genannt (auch Factorielle nach Arbogast). Insbesondere wird das Product $1.2.3\dots n$ nach Kramp (Arithm. universelle 1808 n⁰ 289) durch $n!$ bezeichnet und n-Facultät genannt.

Demnach hat $\binom{m}{k}$ den Zähler $\frac{m!}{(m-k)!}$ und man erhält

$$\binom{m}{k} = \frac{1.2\dots m}{1.2\dots k.1.2\dots(m-k)} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

woraus unmittelbar erhellt, daß

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

Z. B. $\binom{12}{8} = \binom{12}{4} = \frac{12.11.10.9}{1.2.3.4} = 495.$

3. Die Formel $\binom{m}{k}$ hat die Eigenschaft, daß

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} = \binom{m+1}{k}$$

Beweis. $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)..(m-k+1)}{1.2...k} = \binom{m}{k-1}\frac{m-k+1}{k}$ folglich ist

$$\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}=\binom{m}{k-1}\left(\frac{m-k+1}{k}+1\right)=\binom{m}{k-1}\frac{m+1}{k}=\binom{m+1}{k}$$

4. Die Formel $\binom{m}{k}$ ist der $k$te Binomialcoefficient bei der $m$ten Potenz eines Binomium, so daß

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + .. + \binom{m}{m}x^m$$

(Newton's Binomialtheorem, binomischer Lehrsatz).

Beweis. Wenn für einen bestimmten Werth von m

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + ..$$

ist, so findet man

$$\begin{aligned}(1+x)^{m+1} &= 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{3}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + ..\\ &\quad + \quad x + \binom{m}{1}x^2 + \binom{m}{2}x^3 + ..\\ &= 1 + \binom{m+1}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+1}{3}x^3 + ..\end{aligned}$$

weil $\binom{m}{1} + 1 = \binom{m+1}{1}$, $\binom{m}{2}+\binom{m}{1}=\binom{m+1}{2}$, ..(3). Nun ist aber

$$(1+x)^3 = 1 + \binom{3}{1}x + \binom{3}{2}x^2 + \binom{3}{3}x^3$$

wie sich durch Vergleichung dieser Formel mit der in (1) gefundenen ergiebt, also ist auch

$$(1+x)^4 = 1 + \binom{4}{1}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{4}{3}x^3 + \binom{4}{4}x^4$$

$$(1+x)^5 = 1 + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5$$

. . . .

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{m} x^m$$

für jede positive ganze Zahl m*).

Anmerkung. Wenn man x mit $-x$ vertauscht, so bleiben x^2, x^4, .. unverändert, während x^3, x^5, .. in $-x^3$, $-x^5$, .. übergehen. Daher ist

$$(1 - x)^m = 1 - \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 - \binom{m}{3} x^3 + \ldots$$

Wenn $x = \frac{b}{a}$, so ist (1)

$$(a + b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \binom{m}{2} a^{m-2} b^2 + \ldots + \binom{m}{1} a b^{m-1} + b^m$$

weil

$$a^m \frac{b}{a} = a^{m-1} b, \quad a^m \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^m b^2}{a^2} = a^{m-2} b^2, \text{ u. s. f.}$$

$$\binom{m}{m} = 1, \quad \binom{m}{m-1} = \binom{m}{1}, \ldots (2).$$

5. Wenn x ein echter Bruch ist, so wird in der für $(1 + x)^m$ gefundenen Reihe von einem bestimmten Gliede an jedes Glied kleiner als das ihm vorausgehende. Denn das Verhältniß des $(k + 2)$ten Gliedes zum $(k + 1)$ten ist

$$\binom{m}{k+1} x^{k+1} : \binom{m}{k} x^k = \frac{m - k}{k + 1} x < 1,$$

sobald k eine bestimmte Grenze überschreitet. Der Fehler, welchen man begeht, indem man von einem bestimmten Gliede an die folgenden Glieder vernachlässigt, läßt sich in jedem gegebenen Falle abschätzen. Setzt man z. B

$$(1 + x)^m = 1 + mx,$$

so ist der Fehler

$$f = \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \ldots + \binom{m}{m} x^m$$

$$= \binom{m}{2} x^4 \left(1 + \frac{m - 2}{3} x + \frac{m - 2}{3} \frac{m - 3}{4} x^2 + \ldots\right)$$

$$< \binom{m}{2} x^2 \left\{1 + \frac{m - 2}{3} x + \left(\frac{m - 2}{3} x\right)^2 + \ldots\right\}$$

---

*) Die hier angewandte Methode der Induction (Ableitung einer allgemeinen Regel aus einem besondern Falle) ist von Jac. Bernoulli (Acta Erud. 1686 p. 360 angegeben worden, und heißt der Schluß von m auf $m + 1$.

weil die Factoren $\frac{m-3}{4}$, $\frac{m-4}{5}$, .. geringer sind als $\frac{m-2}{3}$. Nun ist

$$1 + \frac{m-2}{3}x + \left(\frac{m-2}{3}x\right)^2 + \ldots < \frac{1}{1-\frac{m-2}{3}x}$$

(§. 12, 5) unter der Voraussetzung, daß $\frac{m-2}{3}x < 1$, folglich

$$f < \binom{m}{2}\frac{x^2}{1-\frac{m-2}{3}x}.$$

Setzt man ebenso

$$(1-x)^m = 1 - mx,$$

so ist der Fehler

$$f = \binom{m}{2}x^2 - \left\{\binom{m}{3}x^3 - \binom{m}{4}x^4\right\} - \left\{\binom{m}{5}x^5 - \binom{m}{6}x^6\right\} - \ldots$$

$$< \binom{m}{2}x^2, \text{ wenn } \frac{m-3}{4}x < 1.$$

Analog kann bei hinreichend kleinem Verhältniß $b : a$

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b$$

gesetzt werden mit der Fehlergrenze

$$\binom{m}{2}\frac{a^{m-2}b^2}{1-\frac{m-2}{3}\frac{b}{a}}$$

und $(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b$ mit der Fehlergrenze $\binom{m}{2}a^{m-2}b^2$.

6. Die $m$ten Wurzeln der Zahlen c, $c \cdot 2^m$, $c \cdot 3^m$, .. verhalten sich zu einander wie 1, 2, 3, ... Unter diesen Radicanden empfiehlt sich zur Berechnung seiner $m$ten Wurzel ein solcher, der von einer $m$ten Potenz sich nur wenig unterscheidet, z. B. $a^m \pm b$, wenn $b : a^m = h$ ein kleiner echter Bruch ist. Dann hat man

$$\sqrt[m]{a^m \pm b} = a\sqrt[m]{1 \pm h}$$

und zwar ist

$$\sqrt[m]{1 \pm h} < 1 \pm \frac{h}{m}$$

weil nach (5)

$$\left(1 \pm \frac{h}{m}\right)^m = 1 \pm h + \ldots > 1 \pm h.$$

Zu genauerer Bestimmung setze man $\sqrt[m]{1+h} = 1 + x$, folglich

$$(1+x)^m = 1 + h,$$

$$mx + \binom{m}{2} x^2 = h - \binom{m}{3} x^3 - \ldots$$

$$x = \frac{h - \binom{m}{3} x^3 - \ldots}{m + \binom{m}{2} x} > \frac{h - \binom{m}{3}\left(\frac{h}{m}\right)^3 - \ldots}{m + \binom{m}{2}\frac{h}{m}}$$

weil $x < h : m$, so daß

$$\sqrt[m]{a^m + b} = a + ax > a + \frac{ab - \frac{m-1}{2m}\frac{m-2}{3m}\frac{b^3}{a^{2m-1}} - \ldots}{ma^m + \frac{1}{2}(m-1)b}$$

Zugleich hat man

$$\frac{2x}{m-1} + x^2 = \frac{2h}{m(m-1)} - \frac{m-2}{3} x^3 \ldots$$

$$x = -\frac{1}{m-1} + \sqrt{\frac{1}{(m-1)^2} + \frac{2h}{m(m-1)} - \frac{m-2}{3} x^3 - \ldots}$$

$$\sqrt[m]{a^m + b} = a + ax < \frac{m-2}{m-1} a + \sqrt{\left(\frac{a}{m-1}\right)^2 + \frac{2b}{m(m-1)a^{m-2}}}$$

Die rationale untere Grenze und mehr noch die irrationale obere Grenze bestimmen die Wurzel mit großer Genauigkeit. Wenn b, h, x negativ sind, so giebt die rationale Formel eine obere, die irrationale eine untere Grenze der Wurzel *).

§. 24. Permutationen gegebener Elemente.

1. Unter Elementen werden hier Dinge (Individuen) verstanden, deren Qualität und Quantität dahin gestellt bleibt, und welche nur durch Ordnungszahlen (Numern, Buchstaben) unterschieden sind. Von zwei Elementen heißt dasjenige das höhere, welches die größere Ordnungszahl hat.

Unter einer Complexion gegebener Elemente wird ein Verein derselben nach irgend welcher Reihenfolge verstanden, wobei die Art der

*) Lagny Méth. nouv. pour l'extraction . . Paris 1692. Halley Philos. Trans. 1694 p. 136. Lambert Beiträge II, 1 p. 152. Allgemeinere Untersuchungen über solche Annäherungen findet man bei Euler Nov. Comm. Petrop. 18. p. 136.

Verbindung dahin gestellt bleibt. Permutationen gegebener Elemente heißen alle die Complexionen derselben, welche sich durch die Anordnung der Elemente unterscheiden.

2. Von n verschiedenen Elementen giebt es $n! = 1 . 2 . 3 .. n$ Permutationen (§. 23, 2).

Beweis. Zu dem 1ten, 2ten, 3ten, .. Element kann jede Permutation der $n - 1$ übrigen Elemente gesetzt werden, folglich giebt es von n verschiedenen Elementen $n$mal soviel Permutationen, als von $n - 1$ Elementen. Nun giebt es von 2 Elementen $1 . 2$ Permutationen (ab und ba), also von 3 Elementen $1 . 2 . 3$ Permutationen, von 4 Elementen $1 . 2 . 3 . 4$ Permutationen, u. s. w.

3. Man findet die Permutationen von 3 Elementen, indem man zu dem Element 1 die Permutationen der Elemente 2, 3, dann zu 2 die Permutationen von 1, 3, dann zu 3 die Permutationen von 1, 2 setzt:

1 2 3   2 1 3   3 1 2
1 3 2   2 3 1   3 2 1

Man findet die Permutationen von 4 Elementen, indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4, zu 2 die Permutationen von 1, 3, 4, zu 3 die Permutationen von 1, 2, 4, und zu 4 die Permutationen von 1, 2, 3 setzt:

1 2 3 4   2 1 3 4   3 1 2 4   4 1 2 3
. . .   .
1 4 3 2   2 4 3 1   3 4 2 1   4 3 2 1

Man findet die Permutationen von 5 Elementen, indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4, 5 setzt, zu 2 die Permutationen von 1, 3, 4, 5, u. s. f.

1 2 3 4 5   2 1 3 4 5   3 1 2 4 5
. . . .
1 5 4 3 2   2 5 4 3 1   3 5 4 2 1
4 1 2 3 5   5 1 2 3 4
. . . .
4 5 3 2 1   5 4 3 2 1

u. s. f. Ueberhaupt verliert bei dieser Methode ein Element seinen Platz erst dann, wenn die Ordnungszahlen der folgenden Elemente eine fallende Reihe bilden. Das Element weicht dem nächst höhern aus der Reihe der folgenden Elemente, und die übrigen Elemente werden so hinzugefügt, daß ihre Ordnungszahlen eine steigende Reihe bilden.

4. Aus einer Complexion können nach und nach alle Permutationen durch Vertauschung von jedesmal 2 Elementen abgeleitet werden*).

Bei 3 Elementen ergiebt sich folgende Reihenfolge der Permutationen, wenn man nach und nach 3 mit 2, 2 mit 1, 1 mit 3, 3 mit 2, 2 mit 1 vertauscht:

1 2 3	2 3 1	3 1 2
1 3 2	2 1 3	3 2|1

Indem man zu 1 die Permutationen von 2, 3, 4 setzt, dann 1 mit 2 vertauscht und die folgenden Elemente versetzt, dann 2 mit 3, 3 mit 4 vertauscht und jedesmal die folgenden Elemente versetzt, findet man für 4 Elemente:

1 2 3 4	2 4 3 1	3 1 2 4	4 3 2 1
. . .	. . .	. . .	. . .
1 4 3 2	2 1 3 4	3 4 2 1	4|1 2 3

Für 5 Elemente:

1 2 3 4 5	2 5 1 3 4	3 4 5 1 2	4 2 3 5 1	5 1 2 3 4
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
1 5 2 3 4	2 4 5 1 3	3 2 4 5 1	4 1 2 3 5	5 4|1 2 3

Für 6 Elemente:

1 2 3 4 5 6	2 6 5 1 3 4	3 4 2 6 5 1
. . . . .	. . . . .	. . . . .
1 6 5 2 3 4	2 4 3 6 5 1	3 1 5 4 2 6
4 1 5 3 2 6	5 6 2 1 4 3	6 3 4 5 2 1
. . . . .	. . . . .	. . . . .
1 6 2 1 5 3	5 3 4 6 2 1	6|1 2 3 4 5

u. s. f. für mehr Elemente.

5. Die erste Permutation enthält die gegebenen Elemente in steigender Ordnung, die folgenden Permutationen zeigen Abweichungen von dieser Ordnung. Man zählt bei jeder Permutation von jedem Element an die Anzahl der niedern Elemente, welche ihm folgen: die Summe dieser Anzahlen heißt die Anzahl der Inversionen (dérangements, variations), welche in der Permutation enthalten sind. Z. B. die Complexion 2431 enthält 4 Inversionen: 21, 43, 41, 31.

Die Anzahl der in einer Complexion vorhandenen Inversionen wird durch die Vertauschung von zwei Elementen um eine ungerade Zahl verändert.

---

*) Gallenkamp Elem. d. Mathem. 1850 §. 110.

Wenn ein Element mit dem Nachbar vertauscht wird, so bleibt die Stellung der bewegten Elemente gegen die übrigen Elemente unverändert, und die Anzahl der vorhandenen Inversionen ändert sich um 1. Um die durch k Elemente getrennten Elemente G und H zu vertauschen, kann man zuerst G mit dem Nachbar zur Rechten $(k + 1)$mal, dann H mit dem Nachbar zur Linken $k$mal vertauschen, wobei die Anzahl der vorhandenen Inversionen $(2k + 1)$mal d. i. ungeradmal um 1 sich ändert. Durch eine ungerade Menge Aenderungen um 1 wird aus einer geraden Zahl eine ungerade, aus einer ungeraden Zahl eine gerade, also ist in beiden Fällen die Differenz der Anzahlen der Inversionen eine ungerade Zahl.

6. Wenn man die Permutationen verschiedener Elemente durch Vertauschung von jedesmal zwei Elementen entwickelt (4), so sind die in den aufeinander folgenden Permutationen vorhandenen Inversionen abwechselnd von gerader und von ungerader Anzahl (5). Da die Anzahl aller Permutationen gerade ist, so giebt es ebensoviel Permutationen der einen Classe (gerade, positive, mit gerader Anzahl von Inversionen), als Permutationen der andern Classe (ungerade, negative, mit ungerader Anzahl von Inversionen).

ABCD und *CDAB* sind Permutationen derselben Classe, weil aus der ersten die zweite durch 2 Vertauschungen (A mit C, B mit D) entsteht; 31245 und 14325 sind Permutationen nicht derselben Classe, weil aus der ersten die zweite durch 3 Vertauschungen (3 mit 1, 4 mit 2 und 3) entsteht.

§. 25. Variationen und Combinationen gegebener Elemente.

(Heis §. 88 ff.)

1. Variationen $k$ter Classe von gegebenen Elementen heißen die Complexionen von je k aus der Reihe der gegebenen Elemente. Die Variationen $n$ter Classe von n Elementen sind von den Permutationen derselben nicht verschieden. Variationen $(n + 1)$ter Classe von n Elementen können nicht gebildet werden.

Die Complexionen, welche je k der gegebenen Elemente enthalten, von denen aber nicht zwei aus denselben k Elementen gebildet sind, heißen die Combinationen $k$ter Classe der gegebenen Elemente. Die Combinationen 1ter, 2ter, 3ter, . . Classe werden auch Unionen, Binionen (Amben), Ternionen (Ternen), . . genannt.

2. Von n verschiedenen Elementen giebt es

$$n(n-1)\,..\,(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \text{ Variationen } k\text{ter Classe,}$$

$$\frac{n(n-1)\,..\,(n-k+1)}{1\,.\,2\,..\,k} = \binom{n}{k} \text{ Combinationen } k\text{ter Classe.}$$

Beweis. Um aus den Variationen $k$ter Classe die Variationen $(k+1)$ter Classe zu bilden, setze man zu jeder Variation jedes Element, das sie noch nicht enthält. Man erhält also $(n-k)$mal soviel Variationen $(k+1)$ter Classe als $k$ter Classe. Nun giebt es n Variationen 1ter Classe, folglich $n(n-1)$ Variationen 2ter Classe, $n(n-1)(n-2)$ Variationen 3ter Classe, u. s. f.

Die Variationen $k$ter Classe lassen sich in Gruppen so vertheilen, daß die Variationen jeder Gruppe Permutationen derselben k Elemente sind. Da zu jeder Gruppe $1\,.\,2\,...\,k$ Variationen gehören (§. 24, 2), so giebt es den $(1\,.\,2\,...\,k)$ten Theil so viel Gruppen als Variationen $k$ter Classe. Jeder Gruppe entspricht eine Combination $k$ter Classe.

Die in §. 23, 2 gebrauchte Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

ist als Anzahl von Combinationen eine ganze Zahl. Von n verschiedenen Elementen giebt es ebensoviel Combinationen $k$ter als $(n-k)$ter Classe.

3. Man findet die Variationen 2ter Classe, indem man zu jedem Element der Reihe nach jedes andere setzt; 3ter Classe, indem man zu jedem Element die Variationen 2ter Classe der übrigen Elemente setzt; 4ter Classe, indem man zu jedem Element die Variationen 3ter Classe der übrigen Elemente setzt, u. s. w.

Für 5 Elemente:

1 2	2 1	3 1	4 1	5 1
1 3	2 3	3 2	4 2	5 2
1 4	2 4	3 4	4 3	5 3
1 5	2 5	3 5	4 5	5 4

1 2 4	2 1 3	3 1 2	4 1 2	5 1 2
1 2 3	2 1 4	3 1 4	4 1 3	5 1 3
..	..	..	..	..
1 5 4	2 5 4	3 5 4	4 5 3	5 4 3 u. s. f.

Man findet die Combinationen 2ter Classe, indem man zu jedem Element der Reihe nach jedes höhere setzt; 3ter Classe, indem man zu jedem Element die Combinationen 2ter Classe aus den höhern Elementen

setzt; 4ter Classe, indem man zu jedem Element die Combinationen 3ter Classe aus den höhern Elementen setzt, u. s. w.

Für 6 Elemente:

1 2	2 3	3 4	4 5	5 6
1 3	2 4	3 5	4 6	
1 4	2 5	3 6		
1 5	2 6			
1 6				

1 2 3	1 3 4	1 4 5	1 5 6	2 3 4	2 4 5	2 5 6
1 2 4	1 3 5	1 4 6		2 3 5	2 4 6	
1 2 5	1 3 6			2 3 6		
1 2 6						

3 4 5	3 5 6	4 5 6
3 4 6		

1 2 3 4	2 3 4 5	3 4 5 6
. . .	. . .	
1 4 5 6	2 4 5 6	

Ueberhaupt behält bei der Aufstellung von Combinationen jedes Element seinen Platz so lange, bis daß die folgenden Elemente durch höhere nicht mehr ersetzt werden können. Dann weicht das Element dem nächsthöhern Element, und die nächsthöhern Elemente folgen.

4. Wenn n verschiedene Elemente in Gruppen A, B, C, .. von α, β, γ, .. Elementen auf alle mögliche Arten vertheilt werden sollen, wobei $\alpha + \beta + \gamma + .. = n$ vorausgesetzt wird: so wählt man zuerst aus allen Elementen α für die Gruppe A, was auf $\binom{n}{\alpha}$ verschiedene Arten geschehen kann (2); dann wählt man aus den jedesmal übrigen Elementen β für die Gruppe B, was auf $\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Arten geschehen kann, u. s. w. Die letzte Gruppe kann jedesmal nur auf eine Art gebildet werden. Also giebt es

$\binom{n}{\alpha}$ verschiedene Gruppen A,

$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Gruppen AB,

$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Gruppen ABC, u. s. w.

Wenn $\delta = n - \alpha - \beta - \gamma$ ist, so kann die letzte Gruppe D jedes-

mal nur auf eine Art gebildet werden, weil $\binom{n-\alpha-\beta-\gamma}{\delta}=1$,
und es giebt

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}=\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\delta!}$$

verschiedene Gruppen $ABCD$.

Wenn man in allen Gruppirungen die Elemente der einzelnen Gruppen permutirt, so erhält man alle Permutationen der gegebenen Elemente, weil jede Permutation mit α bestimmten Elementen beginnt, denen β bestimmte Elemente folgen, u. s. w. In der That erhält man $n!$, indem man die gefundene Anzahl der Gruppirungen mit $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \delta!$ multiplicirt.

Wenn unter den gegebenen n Elementen α einander gleich sind, wenn unter den übrigen β einander gleich sind, wenn unter den übrigen γ einander gleich sind, wenn die übrigen δ von einander verschieden sind, so entstehn aus jeder Gruppirung $\delta!$ Permutationen. Also giebt es

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$$ Permutationen dieser Elemente*).

5. Die Combinationen $k$ter Classe von n Elementen enthalten entweder das $n$te Element nicht, oder sie enthalten dasselbe. Die erste Gruppe umfaßt die Combinationen $k$ter Classe der ersten $n-1$ Elemente, die zweite Gruppe umfaßt die Combinationen $(k-1)$ter Classe dieser Elemente, denen das $n$te Element zugesetzt wird. Also ist

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

wie §. 23, 3 arithmetisch bewiesen worden ist.

Die Combinationen $k$ter Classe von n Elementen endigen entweder mit dem $k$ten Element, oder mit dem $(k+1)$ten Element, oder mit dem $(k+2)$ten Element, u. s. w. Nun endigen mit dem $(k+m)$ten Element soviel Combinationen $k$ter Classe, als es Combinationen $(k-1)$ter Classe der ersten $k+m-1$ Elemente giebt. Also ist

$$\binom{n}{k}=\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\binom{k+1}{k-1}+\ldots+\binom{n-1}{k-1}$$

Durch fortgesetzte Zerlegungen dieser Art bestätigt man, daß $\binom{n}{k}$ eine Summe von ganzen Zahlen, folglich eine ganze Zahl ist.

Die Combinationen $k$ter Classe von $u+v$ Elementen enthalte entweder k Elemente des Systems von u Elementen, oder $k-1$ El

*) Frénicle Abrégé des combin. 1676 (Anc. Mém. de Paris t. V). Walli Combin. 1685. c. 2.

mente dieses Systems und 1 Element des Systems von v Elementen, oder $k-2$ Elemente des ersten Systems und 2 Elemente des zweiten Systems, u. s. w. Nun können $k-m$ Elemente des ersten Systems mit m Elementen des zweiten Systems auf $\binom{u}{k-m}\binom{v}{m}$ verschiedene Arten combinirt werden. Also ist*)

$$\binom{u+v}{k}=\binom{u}{k}+\binom{k}{k-1}\binom{v}{1}+\binom{k}{k-2}\binom{v}{2}+\ldots+\binom{u}{1}\binom{u}{k-1}+\binom{v}{k}$$

6. Wenn jedes der n Elemente beliebig oft gesetzt werden kann, so giebt es von denselben

n^k Variationen $k$ter Classe,

$\binom{n+k-1}{k}=\binom{k+n-1}{n-1}$ Combinationen $k$ter Classe.

Beweis. Um aus den Variationen $k$ter Classe die Variationen $(k+1)$ter Classe zu bilden, setze man zu jeder Variation jedes Element. Man erhält also $n$mal so viel Variationen $(k+1)$ter Classe als $k$ter Classe. Nun giebt es n Variationen 1ter Classe, folglich giebt es n^2 Variationen 2ter Classe, n^3 Variationen 3ter Classe u. s. w.

Combinationen 2ter Classe von der geforderten Art giebt es mit 1 anfangende n, mit 2 anfangende $n-1$, u. s. w., zusammen (5)

$$\binom{n}{1}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{1}{1}=\binom{n+1}{2}.$$

Combinationen 3ter Classe giebt es demnach mit 1 anfangende $\binom{n+1}{2}$, mit 2 anfangende $\binom{n}{2}$, u. s. w., zusammen

$$\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{2}{2}=\binom{n+2}{3}.$$

Gesetzt es giebt $\binom{n+i-1}{i}$ Combinationen $i$ter Classe, so giebt es Combinationen $(i+1)$ter Classe mit 1 anfangende $\binom{n+i-1}{i}$, mit 2 anfangende $\binom{n+i-2}{i}$, u. s. w., zusammen

$$\binom{n+i-1}{i}+\binom{n+i-2}{i}+\ldots+\binom{i}{i}=\binom{n+i}{i+1}.$$

Nun giebt es $\binom{n+2}{3}$ Combinationen 3ter Classe, also giebt es $\binom{n+3}{4}$ Combinationen 4ter Classe, u. s. w.

---

*) Euler. Vergl. die Anmerkung zu §. 23, 1 und §. 32, 2.

Demnach giebt es ebensoviel Combinationen $k$ter Classe von n Elementen, deren jedes $k$mal vorhanden ist, als von $n - k + 1$ Elementen, deren jedes 1mal vorhanden ist (2). In der That findet man aus jenen Combinationen diese, wenn man in jeder Combination die Elemente der Reihe nach um 0, 1, 2, .., $k - 1$ erhöht.

Anmerkung. Die Anfänge der Combinatorik finden sich im 16ten Jahrhundert bei Buckley, Cardano u. A. Die erste größere Abhandlung über Combinationen hat Pascal um 1650 verfaßt, in der er mit Fermat zusammentreffend den Zusammenhang der Combinationszahlen mit den figurirten Zahlen erläuterte (Oeuvres éd. Lahure II. p. 423 ff.) Leibniz's Abhandlung de arte combinatoria 1666 enthält nicht sowohl theoretisch Neues als vielmehr Anwendungen der Lehre von den Permutationen und Combinationen. Der heutige Bestand der Combinatorik findet sich vollständig in Jacob Bernoulli's ars conjectandi (op. posth. 1713). In diesem Buche kommt der Name Permutationen vor, wofür Leibniz Variationen, Wallis Alternationen gebraucht hatte. Der Name Complexionen bedeutet bei Leibniz Combinationen; der Name Variationen hat seine combinatorische Bedeutung gegen das Ende des 18ten Jahrhunderts erhalten.

§. 26. Determinante eines Systems von Zahlen.

1. Wenn ein Quadrat von Elementen gegeben ist d. h. n^2 Elemente (Zahlen), je n in n Reihen geordnet, von denen das $k$te der $i$ten Zeile (das $i$te der $k$ten Colonne) durch a_{ik} bezeichnet wird, z. B.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

so versteht man unter der Determinante*) dieses Systems ein bestimmtes Aggregat aller Producte von je n Elementen, deren nicht zwei einer Zeile oder einer Colonne angehören. Das Product von n Elementen $a_{fr}\ a_{gs}\ a_{ht}$ .. ist ein Glied der Determinante, wenn sowohl die Zeilen-Nummern fgh .. als auch die Colonnen-Nummern rst .. Permutationen der n Nummern 123 .. sind; das Zeichen dieses Gliedes ist + oder —, je nachdem fgh .. und rst .. Permutationen derselben Classe (§. 24, 6) oder nicht zu derselben Classe sind. Insbesondere ist das aus der Diagonale a_{11} .. a_{nn} gebildete Product ein positives Glied der Determinante, das Anfangsglied derselben.

Aus einem Glied der Determinante z. B. $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$ .. leitet man alle Glieder mit den zugehörigen Zeichen ab, indem man bei unveränderten Zeilen-Nummern die Colonnen-Nummern oder bei unveränderten Colonnen-Nummern die Zeilen-Nummern durch alle ihre Per-

*) Die Geschichte und die weitere Entwickelung dieser Formen findet man in der Schrift des Verf. über Determinanten.

mutationen ersetzt. Z. B. das Glied $a_{fr}\ a_{gs}\ a_{ht}$ . . kann aus $a_{ff}\ a_{gg}\ a_{hh}$ . . und aus $a_{rr}\ a_{ss}\ a_{tt}$ . ., die beide von $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$ . . nicht verschieden sind, abgeleitet werden, aus jenem durch Permutation der Colonnen-Nummern, aus diesem durch Permutation der Zeilen-Nummern. Wenn bei dem Uebergang von fgh . . zu rst . . ein Zeichenwechsel stattfindet, so ist dieß auch bei dem Uebergang von rst . . zu fgh . . der Fall; durch beide Ableitungen findet man dieselben Glieder mit denselben Zeichen.

Die Determinante des Systems von n^2 Elementen hat $n!$ Glieder, ebensoviel negative als positive. Sie heißt $n$ten Grades, weil ihre Glieder Producte von n Factoren sind, und wird durch Einschluß des Systems zwischen Linien oder durch das mit dem Doppelzeichen $\pm$ unter ein Summirungszeichen gesetzte Anfangsglied bezeichnet:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\ a_{22} \ . \ . \ a_{nn}$$

Die Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot\ \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdot\ \cdot & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdot\ \cdot & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix}$$

von Systemen, in denen die Zeilen des einen mit den Colonnen des andern übereinstimmen, sind von einander nicht verschieden, weil sie dasselbe Anfangsglied haben, und weil jedes Glied der einen in der andern mit demselben Zeichen vorkommt.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}\ a_{22} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 + 2fgh$$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & h & g \\ b & h & 0 & f \\ c & g & f & 0 \end{vmatrix} = a^2 f^2 + b^2 g^2 + c^2 h^2 - 2abfg - 2acfh - 2bcgh$$

2. Wenn im System der Elemente zwei parallele Reihen vertauscht werden, so wechselt die Determinante das Zeichen. Wenn im System der Elemente zwei parallele Reihen einander gleich sind, so hat die Determinante den Werth 0.

Beweis. Ist R die Determinante des gegebenen Systems, R' die Determinante des Systems, das aus dem gegebenen System durch Vertauschung von zwei parallelen Reihen abgeleitet worden, so kommt das Anfangsglied von R' in R negativ vor, weil es aus dem Anfangsgliede von R durch Vertauschung von zwei ersten oder von zwei zweiten Nummern gebildet ist. Alle andern Glieder von R' kommen in R ebenfalls mit den entgegengesetzten Zeichen vor, weil sie aus dem Anfangsglied von R durch eine gerade oder ungerade Anzahl Vertauschungen von Nummern sich bilden lassen, wenn sie aus dem Anfangsgliede von R' durch eine ungerade oder gerade Anzahl Vertauschungen gebildet waren. Daher ist $R' = -R$.

Wenn die vertauschten Reihen einander gleich sind, so ist R' von R nicht verschieden, also $R = -R$ d. h. $R = 0$ bei beliebigen Elementen.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a & a_2 \\ b & b_1 & b & b_2 \\ c & c_1 & c & c_2 \\ d & d_1 & d & d_2 \end{vmatrix} = 0$$

3. Wenn man von dem System der n^2 Elemente m Zeilen auswählt und von diesen ebensoviel Colonnen, so erhält man ein partiales System von m^2 Elementen, dessen Determinante eine Subdeterminante $m$ten Grades des gegebenen Systems heißt. Es giebt $\binom{n}{m}^2$ Subdeterminanten $m$ten Grades und ebensoviel $(n-m)$ten Grades (§. 25, 2). Demnach kommen bei dem gegebenen System in Betracht außer der Determinante $n$ten Grades

n^2 Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades,

$\binom{n}{2}^2$ Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades,

u. s. w. Die Subdeterminanten ersten Grades sind die einzelnen Elemente.

Die Combinationen von je m unter den Nummern 1 bis n, deren es $\mu = \binom{n}{m}$ giebt, werden beliebig nummerirt, und die zu der $i$ten

Combination der Zeilen und der $k$ten Combination ihrer Colonnen gehörende Subdeterminante wird durch p_{ik} bezeichnet. So bildet man

$$\begin{matrix} p_{11} & \cdot\cdot & p_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ p_{\mu 1} & \cdot\cdot & p_{\mu\mu} \end{matrix}$$

das System der Subdeterminanten $m$ten Grades, welche bei dem gegebenen System von Elementen vorhanden sind.

4. Zwei Subdeterminanten, deren Grade sich zu n ergänzen,

$$p_{ik} = \Sigma \pm a_{\alpha f}\, a_{\beta g} \,.\,. \text{ und } q_{ik} = \Sigma \pm a_{\varrho t}\, a_{\sigma u} \,.\,.$$

heißen adjungirt, wenn der Verein ihrer Zeilen-Nummern $\alpha\beta\,.\,.\,\varrho\sigma$. und der Verein ihrer Colonnen-Nummern $fg\,.\,.\,tu\,.\,.$ Permutationen derselben Classe bilden. Adjungirt sind z. B.

$$\Sigma \pm a_{22} \,.\,.\, a_{nn} \text{ und } a_{11}$$
$$\Sigma \pm a_{33} \,.\,.\, a_{nn} \text{ und } \Sigma \pm a_{11}\, a_{22}$$

Bei $n = 5$ sind adjungirt

$$a_{34} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{45} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} & a_{53} \end{vmatrix}$$

weil $3|1245$ und $4|1253$ Permutationen derselben Classe sind;

$$\begin{vmatrix} a_{15} & a_{12} \\ a_{35} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}$$

weil $13|245$ und $52|134$ zu derselben Classe gehören.

Wenn p_{ik} und q_{ik} adjungirte Subdeterminanten sind, so sind die Systeme (3)

$$\begin{matrix} p_{11} & \cdot\cdot & p_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ p_{\mu 1} & \cdot\cdot & p_{\mu\mu} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} q_{11} & \cdot\cdot & q_{1\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ q_{\mu 1} & \cdot\cdot & q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

adjungirte Systeme von Subdeterminanten des gegebenen Systems. Insbesondere sind die Systeme

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \cdot\cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot\cdot & \alpha_{nn} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & \cdot\cdot & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & \cdot\cdot & a_{nn} \end{matrix}$$

adjungirt, wenn durch α_{ik} die dem Element a_{ik} adjungirte Subdeterminante $(n-1)$ten Grades bezeichnet wird.

5. Wenn die Subdeterminanten $m$ten und $(n-m)$ten Grades p_{ik} und q_{ik} adjungirt sind (4), so sind alle Glieder des Products $p_{ik}\, q_{ik}$

Glieder der Determinante *n*ten Grades R des gegebenen Systems. Denn das Anfangsglied des Products

$$a_{\alpha f}\ a_{\beta g}\ \ldots\ a_{\varrho t}\ a_{\sigma u}\ \ldots$$

ist ein Glied von R (1). Nach Vertauschung von zwei ersten Nummern α, β sind $\beta\alpha\ \ldots\ \varrho\sigma\ \ldots$ und $fg\ \ldots\ tu\ \ldots$ Permutationen nicht derselben Classe, also ist $-\,a_{\beta f}\ a_{\alpha g}\ \ldots$ ein Glied von p_{ik} und das Glied des Products

$$-\,a_{\beta f}\ a_{\alpha g}\ \ldots\ a_{\varrho t}\ a_{\sigma u}\ \ldots$$

ein Glied von R, u. s. w.

Ueberhaupt ist $\Sigma \pm a_{\alpha f}\ a_{\beta g}\ \ldots\ a_{\varrho t}\ a_{\sigma u}\ \ldots = R$ (2). Die Glieder von R, welche die Elemente $a_{\alpha f}, a_{\beta g}, \ldots$ enthalten, sind in der Formel $a_{\alpha f}\ a_{\beta g}\ \ldots\ \Sigma \pm a_{\varrho t}\ a_{\sigma u}\ \ldots$ vereinigt. Die Glieder von $\Sigma \pm a_{11}\ \ldots\ a_{55}$ welche das Element a_{23} enthalten, sind in $a_{23}\ \Sigma \pm a_{12}\ a_{31}\ a_{44}\ a_{55}$ vereinigt; die Glieder, welche a_{31}, a_{14} enthalten, werden durch $a_{31}\ a_{14}\ \Sigma \pm a_{22}\ a_{43}\ a_{55}$ ausgedrückt.

6. Wenn dem System

$$\begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

dessen Determinante den Werth R hat, das System

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ & \ldots & \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{matrix}$$

adjungirt ist (4), so hat die aus zwei Zeilen (Colonnen) der beiden Systeme z. B. aus der *i*ten Zeile (Colonne) des einen und der *k*ten Zeile (Colonne) des andern Systems durch successive Multiplication der Elemente und Addition der Producte componirte Formel

$$a_{i1}\ \alpha_{k1} + a_{i2}\ \alpha_{k2} + \ldots + a_{in}\ \alpha_{kn}$$
$$a_{1i}\ \alpha_{1k} + a_{2i}\ \alpha_{2k} + \ldots + a_{ni}\ \alpha_{nk}$$

den Werth R oder 0, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich.

Beweis. Die Glieder der Determinante enthalten von der *i*ten Zeile (Colonne) entweder das 1te Element, oder das 2te, oder das 3te, u. s. w. (1). Nun sind die Glieder der Determinante, welche das Element a_{ik} enthalten, in dem Product $a_{ik}\ \alpha_{ik}$ vereinigt (4, 5). Also umfaßt die Summe

$$a_{i1}\ \alpha_{i1} + a_{i2}\ \alpha_{i2} + \ldots \text{ oder } a_{1i}\ \alpha_{1i} + a_{2i}\ \alpha_{2i} + \ldots$$

alle Glieder der Determinante. Daher ist

$$a_{k1}\ \alpha_{i1} + a_{k2}\ \alpha_{i2} + \ldots \text{ oder } a_{1k}\ \alpha_{1i} + a_{2k}\ \alpha_{2i} + \ldots$$

die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen System dadurch erhalten wird, daß man die $i$te Zeile (Colonne) durch die $k$te ersetzt. Die Zeilen (Colonnen) dieses Systems sind nicht alle von einander verschieden, also ist die Determinante dieses Systems null (2).

Beispiel. Wenn $\begin{matrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{matrix}$ adjungirt sind, d. h.

$$\alpha = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b \\ c_2 & c \end{vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} b & b_1 \\ c & c_1 \end{vmatrix}$$

$$\beta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \quad \beta_1 = \begin{vmatrix} c_2 & c \\ a_2 & a \end{vmatrix} \quad \beta_2 = \begin{vmatrix} c & c_1 \\ a & a_1 \end{vmatrix}$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a \\ b_2 & b \end{vmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} a & a_1 \\ b & b_1 \end{vmatrix}$$

wenn die Determinante des gegebenen Systems R ist, so ist

$$\begin{aligned} a\alpha + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 &= R & \qquad a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma &= R \text{ u. s. w.} \\ b\alpha + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 &= 0 & a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma &= 0 \\ c\alpha + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 &= 0 & a_2\alpha + b_2\beta + c_2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

7. Wenn alle Elemente einer Reihe des gegebenen Systems null sind, so ist die Determinante null. Wenn nur ein Element einer Reihe nicht null ist, so fallen die Glieder der Determinante weg, welche jenes Element nicht enthalten.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . \\ 0 & a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & . & . \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & . \\ a_{32} & a_{33} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & . \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & . \\ . & . & . & . & \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & . \\ a_{43} & a_{44} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Wenn alle Elemente einerseits der Diagonale null sind, so bleibt nur das Anfangsglied der Determinante übrig.

Umgekehrt kann ein gegebenes System ohne Veränderung seiner Determinante mit einem Rand besetzt werden, der an der Spitze 1, einerseits Nullen, andrerseits beliebige Elemente enthält.

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a & a' \\ y & b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & u \\ 0 & a & a' \\ 0 & b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' & v \\ b & b' & w \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Wenn man alle Elemente einer Reihe des Systems mit einer Zahl multiplicirt, so wird die Determinante des Systems mit derselben Zahl multiplicirt. Dabei geht (6)

$a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$ über in $pa_{1k}\,\alpha_{1k} + pa_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$

also R in pR. Z. B.

$$\begin{vmatrix} pa_1 & a_2 & a_3 \\ pb_1 & b_2 & b_3 \\ pc_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} pa_1 & pa_2 & pa_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & a \\ -b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & pa & a' \\ b & pb & b' \\ c & pc & c' \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} a & a & a' \\ b & b & b' \\ c & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

Wenn die Elemente einer Reihe zu einander sich verhalten, wie die Elemente einer parallelen Reihe, so ist die Determinante null (2).

9. Wenn die Elemente einer Reihe polynomisch sind, so ist die Determinante des Systems die Summe mehrerer Determinanten.

$$\begin{vmatrix} p_1 + q_1 + r_1 & a_{12} & . \\ p_2 + q_2 + r_2 & a_{22} & . \\ \ldots & . & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & a_{12} & . \\ p_2 & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & a_{12} & . \\ q_2 & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r_1 & a_{12} & . \\ r_2 & a_{22} & . \\ . & . & \end{vmatrix}$$

Denn unter der Voraussetzung $a_{ik} = p_i + q_i + r_i$ hat man

$$R = a_{1k}\,\alpha_{1k} + a_{2k}\,\alpha_{2k} + \ldots$$

$$= p_1\,\alpha_{1k} + p_2\,\alpha_{2k} + \ldots + q_1\,\alpha_{1k} + q_2\,\alpha_{2k} + \ldots + r_1\,\alpha_{1k} + r_2\,\alpha_{2k} + \ldots$$

Wenn man zu den Elementen einer Colonne (Zeile) die Elemente einer andern mit einer beliebigen Zahl multiplicirten Colonne (Zeile) der Reihe nach addirt, so bleibt die Determinante unverändert.

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + pa_1 & a_1 & a_2 \\ b + pb_1 & b_1 & b_2 \\ c + pc_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} \text{ weil } \begin{vmatrix} pa_1 & a_1 & a_2 \\ pb_1 & b_1 & b_2 \\ pc_1 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Daher ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x \\ y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & x_1 - x & x_2 - x \\ y & y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

10. Der Satz (6) gilt in gleicher Weise für die adjungirten Systeme (4)

$$\begin{matrix} p_{11} \cdot\cdot p_{1\mu} & & q_{11} \cdot\cdot q_{1\mu} \\ \cdot\ \cdot\cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\cdot\ \cdot \\ p_{\mu 1} \cdot\cdot p_{\mu\mu} & & q_{\mu 1} \cdot\cdot q_{\mu\mu} \end{matrix}$$

Die aus zwei Zeilen (Colonnen) der beiden Systeme componirte Formel

$$p_{i1} q_{k1} + p_{i2} q_{k2} + \cdot\cdot\, p_{i\mu} q_{k\mu}$$
$$p_{1i} q_{1k} + p_{2i} q_{2k} + \cdot\cdot\, p_{\mu i} q_{\mu k}$$

hat den Werth R oder 0, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich.

Beweis. Die Glieder der Determinante R enthalten von der $i$ten Zeilen-Combination die Elemente entweder der 1ten Colonnen-Combination, oder der 2ten, oder der 3ten, u. s. w. Nun sind die Glieder von R, welche die Subdeterminante p_{ih} enthalten, in dem Product $p_{ih} q_{ih}$ vereinigt (5). Also umfaßt die Summe

$$p_{i1} q_{i1} + p_{i2} q_{i2} + \cdot\cdot \quad \text{oder} \quad p_{1i} q_{1i} + p_{2i} q_{2i} + \cdot\cdot$$

alle Glieder der Determinante. Daher ist $p_{k1} q_{i1} + p_{k2} q_{i2} + \cdot\,\cdot$ die Determinante des Systems, welches aus dem gegebenen System dadurch erhalten wird, daß man die $i$te Zeilen-Combination durch die $k$te ersetzt. Die Zeilen dieses Systems sind nicht alle von einander verschieden, also ist die Determinante desselben null. Z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 12 \mid 34 + 23 \mid 14 + 31 \mid 24 \\ + 34 \mid 12 + 14 \mid 23 + 24 \mid 31 \end{matrix}$$

$$\text{wenn} \quad 12 \mid 34 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & \cdot\ \cdot & a_5 \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ e_1 & \cdot\ \cdot & e_5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 12 \mid 345 + 23 \mid 145 + 34 \mid 125 + 45 \mid 123 \\ + 13 \mid 425 + 24 \mid 315 + 35 \mid 142 \\ + 14 \mid 235 + 25 \mid 134 \\ + 15 \mid 243 \end{matrix}$$

$$\text{wenn} \quad 12 \mid 345 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_3 & c_4 & c_5 \\ d_3 & d_4 & d_5 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

11. Wenn die Determinante des gegebenen Systems null ist, so verhalten sich in jedem System von Subdeterminanten die Elemente einer Zeile (Colonne) zu einander der Reihe nach wie die Elemente einer andern Zeile (Colonne).

Beweis. Unter der Voraussetzung, daß $R = 0$, und daß α_{i1}, $\alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ nicht alle null sind, wird durch den Verein von Gleichungen

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}$$

die Proportion $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$ bestimmt. Bei beliebigem λ genügen

$$x_1 = \lambda\alpha_{i1} \quad x_2 = \lambda\alpha_{i2} \quad \ldots \quad x_n = \lambda\alpha_{in}$$

den Gleichungen, in Betracht daß

$$a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n = \lambda(a_{r1}\alpha_{i1} + \ldots + a_{rn}\alpha_{in})$$

null ist (6). Daher ist $\alpha_{i1} : \alpha_{i2} : \ldots = x_1 : x_2 : \ldots$ unabhängig von der Zeilen-Nummer.

Aus (8) schließt man weiter, daß alle Determinanten zweiten und höhern Grades für das System der Subdeterminanten

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{array}$$

null sind. Dieselben Schlüsse gelten auf Grund von (10) für das System $p_{11} \ldots p_{\mu\mu}$.

12. Aus den gegebenen (rectangulären oder quadratischen) Systemen

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{array}$$

werde das System von m^2 polynomischen Elementen

$$\begin{array}{ccc} c_{11} & \ldots & c_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mm} \end{array}$$

componirt, und zwar c_{ik} aus der $i$ten Zeile des ersten Systems und aus der $k$ten Zeile des zweiten durch successive Multiplication der Elemente und Addition der Producte also:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{k1} + \ldots + a_{in}b_{kn} = \sum_t a_{it}b_{kt} \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

I. **Die Determinante des componirten Systems** hat das Anfangsglied

$$c_{11}c_{22}c_{33}\ldots = \sum_t a_{1t}b_{1t} \sum_u a_{2u}b_{2u} \sum_v a_{3v}b_{3v} \ldots$$

$$= \sum_{tuv\ldots} (a_{1t}a_{2u}a_{3v} \ldots b_{1t}b_{2u}b_{3v} \ldots)$$

eine Summe, deren Glieder entstehn, während $t, u, v, \ldots$ die Nummern 1 bis n durchlaufen.

Aus dem Anfangsglied entstehn die übrigen Glieder der gesuchten Determinante, wenn bei fixirten Zeilen-Nummern für die Colonnen-Nummern alle Permutationen derselben eintreten (1). Bei unveränderten $t, u, v, ..$ findet man jedesmal alle Glieder der Determinante $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} ..$ mit dem gemeinschaftlichen Factor $a_{1t} a_{2u} a_{3v} ...$ Also ist

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} .. = \sum_{tuv..} (a_{1t} a_{2u} a_{3v} .. \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} ..)$$

Wenn $t, u, v, ..$ nicht alle verschieden sind, so ist $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} .. = 0$. Daher erhält man alle Glieder der Summe, indem man für $tuv ..$ je m verschiedene Nummern der Reihe 1 bis n setzt.

II. Wenn $m < n$ und wenn man anstatt einer bestimmten Combination $tuv ..$ deren Permutationen setzt, so hat $\Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} ..$ den Werth Q oder den Werth $- Q$ (2). Daher liefern die entsprechenden Glieder der zu bildenden Summe alle Glieder der Determinante $\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} a_{3v} ..$ mit dem gemeinschaftlichen Factor Q. Folglich ist

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} c_{33} .. = \sum_{tuv..} (\Sigma \pm a_{1t} a_{2u} a_{3v} .. \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} ..)$$

eine Summe, deren Glieder dadurch gebildet werden, daß man für $tuv ..$ alle Combinationen von m verschiedenen Nummern der Reihe 1 bis n setzt. Die Determinante des componirten Systems ist demnach die Summe von $\binom{n}{m}$ Producten entsprechender Determinanten $m$ten Grades der beiden gegebenen Systeme.

III. Wenn $m = n$, so kann man für $tuv ..$ nur $123 ..$ setzen und findet

$$\Sigma \pm c_{11} .. c_{nn} = \Sigma \pm a_{11} .. a_{nn} \Sigma \pm b_{11} .. b_{nn}$$

Die Determinante des componirten Systems ist das Product der Determinanten der beiden gegebenen Systeme.

IV. Wenn $m > n$, so sind alle Glieder der Summe

$$\sum_{tuv..} (a_{1t} a_{2u} a_{3v} .. \Sigma \pm b_{1t} b_{2u} b_{3v} ..)$$

null, also ist die Determinante des componirten Systems null.

Beispiel. Die Determinante des aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{matrix}$$

componirten Systems

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 \end{matrix}$$

wird bezeichnet durch

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

und aufgelöst in die Summe der Producte

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 & h_1 \\ f_2 & h_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

Die Determinante des aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{matrix}$$

componirten Systems

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & a_1 f_2 + b_1 g_2 + c_1 h_2 & a_1 f_3 + b_1 g_3 + c_1 h_3 \\ a_2 f_1 + b_2 g_1 + c_2 h_1 & a_2 f_2 + b_2 g_2 + c_2 h_2 & a_2 f_3 + b_2 g_3 + c_2 h_3 \\ a_3 f_1 + b_3 g_1 + c_3 h_1 & a_3 f_2 + b_3 g_2 + c_3 h_2 & a_3 f_3 + b_3 g_3 + c_3 h_3 \end{matrix}$$

ist das Product

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

Die Determinante des aus den Systemen

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ . & . & . \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ . & . & . \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{matrix}$$

componirten Systems

$$\begin{matrix} a_1 f_1 + b_1 g_1 + c_1 h_1 & .. & .. & a_1 f_4 + b_1 g_4 + c_1 h_4 \\ .. \quad .. \quad .. & .. & .. & .. \quad .. \quad .. \\ a_4 f_1 + b_4 g_1 + c_4 h_1 & .. & .. & a_4 f_4 + b_4 g_4 + c_4 h_4 \end{matrix}$$

wird bezeichnet durch

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ . & . & . \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ . & . & . \\ f_4 & g_4 & h_4 \end{vmatrix}$$

und ist null und in der That nicht verschieden von

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ . & . & . & . \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 & 0 \\ . & . & . & . \\ f_4 & g_4 & h_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

13. Wenn dem System $a_{11} \,..\, a_{nn}$, welches die Determinante R hat, das System $\alpha_{11} \,..\, \alpha_{nn}$ adjungirt ist (4), so verhalten sich die Subdeterminanten $m$ten Grades des Systems α zu einander, wie die adjungirten der entsprechenden Subdeterminanten des Systems a.

Beweis. Der Subdeterminante $m$ten Grades $\Sigma \pm \alpha_{fi}\alpha_{gk}\,..$ sei die Subdeterminante $(n-m)$ten Grades $\Sigma \pm \alpha_{ru}\alpha_{sv}\,..$ adjungirt, welcher die Subdeterminante $\Sigma \pm a_{ru}a_{sv}\,..$ des Systems a entspricht. Aus den Systemen von je n^2 Elementen

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_{fi} & \alpha_{fk} & .. & \alpha_{fu} & \alpha_{fv} & .. \\ \alpha_{gi} & \alpha_{gk} & .. & \alpha_{gu} & \alpha_{gv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \\ 0 & 0 & .. & 1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & .. & 0 & 1 & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} a_{fi} & a_{fk} & .. & a_{fu} & a_{fv} & .. \\ a_{gi} & a_{gk} & .. & a_{gu} & a_{gv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \\ a_{ri} & a_{rk} & .. & a_{ru} & a_{rv} & .. \\ a_{si} & a_{sk} & .. & a_{su} & a_{sv} & .. \\ . & . & .. & . & . & .. \end{array}$$

werde das System von n^2 Elementen $c_{11}\,..\,c_{nn}$ componirt (12). Dann hat in den m ersten Colonnen c_{ik} den Werth R oder 0, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich (6). Die folgenden Colonnen sind von den entsprechenden Colonnen des zweiten Systems nicht verschieden. Das Product der Determinanten der beiden Systeme ist die Determinante des componirten Systems (12, III). Das erste System hat nach Streichung der Ränder mit der Spitze 1 die Determinante $\Sigma \pm \alpha_{fi}\alpha_{gk}\,..$ (7). Das zweite System hat die Determinante R (5). Das componirte System hat nach Streichung der Ränder mit der Spitze R die Determinante $R^m\,\Sigma \pm a_{ru}a_{sv}\,..$ (7). Also ist

$$R\,\Sigma \pm \alpha_{fi}\alpha_{gk}\,.. = R^m\,\Sigma \pm a_{ru}a_{sv}\,..$$

folglich

$$\Sigma \pm \alpha_{fi}\alpha_{gk}\,.. : \Sigma \pm a_{ru}a_{sv}\,.. = R^{m-1}$$

für alle Combinationen $m$ter Classe $fg\,..$ und $ik\,...$

Insbesondere ist $\Sigma \pm \alpha_{11}\,..\,\alpha_{nn} = R^{n-1}$. Wenn $\Sigma \pm a_{11}\,..\,a_{55} = R$, so ist $\Sigma \pm \alpha_{21}\alpha_{43}\alpha_{54} : \Sigma \pm a_{15}a_{32} = R^2$ u. s. w.

Derselbe Satz gilt auf Grund von (10) für die Subdeterminanten desselben Grades der adjungirten Systeme $p_{11}\,..\,p_{\mu\mu}$ und $q_{11}\,..\,q_{\mu\mu}$.

§. 27. Producte und Potenzen von Polynomien.

(Heis §. 92.)

1. Das Product $(a_1 + x)(a_2 + x)\,..\,(a_n + x)$ giebt entwickelt eine Summe von 2^n Gliedern. Das Anfangsglied ist das Product aller ersten Glieder der Binomien $a_1 a_2\,..\,a_n$; das Schlußglied ist das Product aller zweiten Glieder x^n. Die Glieder des Products, welche den Factor x^k gemein haben, entstehen durch Multiplication von je

$n - k$ ersten Gliedern der Binomien und den zweiten Gliedern der übrigen Binomien. Der Coefficient von x^k ist demnach die Summe der Producte von je $n - k$ verschiedenen Größen aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Um diesen Coefficienten zu berechnen, bildet man die Combinationen $(n - k)$ter Classe der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z. B.

$$(a+x)(b+x)(c+x)(d+x) = abcd + (abc + abd + acd + bcd)x$$
$$+ (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (a + b + c + d)x^3 + x^4.$$

Wenn insbesondere alle Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einander gleich sind und den Werth a haben, so ist der Coefficient von x^k die Summe von $\binom{n}{n-k}$ Gliedern, deren jedes den Werth a^{n-k} hat. Da aber $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ ist, so erhält man

$$(a + x)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}x + \binom{n}{2} a^{n-2}x^2 + \ldots$$

wie §. 23 aus andern Gründen entwickelt worden ist.

2. Die Potenz $(a + b + c + \ldots)^n$ giebt entwickelt eine Summe von Gliedern, die je n Factoren aus der Reihe $a, b, c, \ldots$ enthalten und aus der allgemeinen Formel

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ \ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

dadurch hervorgehen, daß $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ auf alle mögliche Arten gleiche oder ungleiche Werthe von 0 bis n erhalten, deren Summe jedesmal n beträgt*).

Beweis. Aus der Reihe der n Polynomien $a + b + c + \ldots$ wähle man α, um aus ihren ersten Gliedern a^α zu bilden. Aus den übrigen $n - \alpha$ Polynomien wähle man β, um aus ihren zweiten Gliedern b^β zu bilden. Aus den übrigen $n - \alpha - \beta$ Polynomien wähle man γ, um aus ihren dritten Gliedern c^γ zu bilden, u. s. f. Wenn man das Product $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ auf alle mögliche Arten gebildet hat, so hat man alle Glieder der gesuchten Potenz.

Man kann aber a^α auf $\binom{n}{\alpha}$ verschiedene Arten bilden, weil es soviel Combinationen αter Classe der n Polynomien giebt. Man kann dann ebenso b^β auf $\binom{n-\alpha}{\beta}$ verschiedene Arten, dann c^γ auf $\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Arten, u. s. w. bilden. Man kann folglich $a^\alpha b^\beta$ auf

*) Leibniz an Joh. Bernoulli 1695 Mai $\frac{6}{16}$. Vergl. Klügel math. W. 3 p. 832.

$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\beta}{\beta}$ verschiedene Arten, $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ auf $\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}$ verschiedene Arten, u. s. w. bilden. Daher erhält das Glied $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ .. den Coefficienten

$$\binom{n}{\alpha}\binom{n-\alpha}{\beta}\binom{n-\alpha-\beta}{\gamma}\ldots = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}$$

d. i. die Anzahl der Permutationen von n Elementen, deren α den Werth a, β den Werth b, γ den Werth c, .. haben (§. 25, 4).

Beispiel. Wenn $n = 4$, so sind folgende Combinationen der Exponenten möglich:

4   3 1   2 1 1   1 1 1 1
     2 2

Man bilde nun die Combinationen 1ter bis 4ter Classe der Elemente $a, b, c,$ .. und nehme die Elemente
in jeder Combination 1ter Classe mit dem Exponenten 4,
in jeder Combination 2ter Classe der Reihe nach mit den Exponenten

3, 1   1, 3   2, 2

in jeder Combination 3ter Classe mit den Exponenten

2, 1, 1   1, 2, 1   1, 1, 2

in jeder Combination 4ter Classe mit dem Exponenten 1.

Die Glieder a^4, .. erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4} = 1$.

Die Glieder a^3b, ab^3, .. erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.3} = 4$.

Die Glieder a^2b^2, .. erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2.1.2} = 6$.

Die Glieder a^2bc, ab^2c, .. erhalten den Coefficienten $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$.

Die Glieder $abcd$, .. erhalten den Coefficienten $1.2.3.4 = 24$.

Werden die Summen dieser Glieder der Reihe nach durch

$$\Sigma a^4,\quad \Sigma a^3b,\quad \Sigma a^2b^2,\quad \Sigma a^2bc,\quad \Sigma abcd$$

und das Polynomium $a + b + c + \ldots$ durch P bezeichnet, so ist

$$P^4 = \Sigma a^4 + 4\Sigma a^3b + 6\Sigma a^2b^2 + 12\Sigma a^2bc + 24\Sigma abcd.$$

Analog hat man

$$P^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab,$$

$$P^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2b + 6\Sigma abc, \text{ u. s. w.}$$

Um bei der Potenzirung mit 6 z. B. Σa^3b^2c darzustellen, bildet man die Combinationen 3ter Classe der Elemente $a, b, c,$ .. und giebt den Elementen der einzelnen Complexionen der Reihe nach die Exponenten

3, 2, 1   3, 1, 2   2, 3, 1 u. s. f.

3. Um die Potenz $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \,..)^n$ in eine Summe von Gliedern nach der Reihe der darin vorkommenden Potenzen von x geordnet zu entwickeln, bildet man die Combinationen $n$ter Classe der Elemente $a_0, a_1, a_2, \ldots$, deren jedes $n$mal gesetzt werden kann, so daß die Summen der Indices in den einzelnen Combinationen der Reihe nach die Werthe 0, 1, 2, .. haben. Wenn eine Combination aus α Elementen a_0, β Elementen a_1, γ Elementen a_2, .. besteht und die Summe der n Indices $\alpha.0 + \beta.1 + \gamma.2 + \,.. = k$, so ist (2)

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ ..}\ a_0^{\alpha}\ (a_1 x)^{\beta}\ (a_2 x^2)^{\gamma}\ ..$$

ein Glied der gesuchten Reihe, welches x^k enthält, weil

$$a_0^{\alpha}\ (a_1 x)^{\beta}\ (a_2 x^2)^{\gamma}\ .. = a_0^{\alpha}\ a_1^{\beta}\ a_2^{\gamma}\ ..\ x^{\beta+2\gamma+..}$$

Man findet alle Glieder, in denen x^k vorkommt, wenn man die Zahl k aus n ungleichen oder gleichen Indices der Glieder des Polynomium 0, 1, 2, .. auf alle verschiedenen Arten zusammensetzt*). Z. B. für $n = 5$ kann man die Exponenten von x auf folgende Arten zusammensetzen:

0 aus	0	0	0	0	0	6 aus	0	0	0	0	6
1 aus	0	0	0	0	1		0	0	0	1	5
2 aus	0	0	0	0	2		0	0	0	2	4
	0	0	0	1	1		0	0	0	3	3
3 aus	0	0	0	0	3		0	0	1	1	4
	0	0	0	1	2		0	0	1	2	3
	0	0	1	1	1		0	0	2	2	2
4 aus	0	0	0	0	4		0	1	1	1	3
	0	0	0	1	3		0	1	1	2	2
	0	0	0	2	2		1	1	1	1	2
	0	0	1	1	2	7 aus	0	0	0	0	7
	0	1	1	1	1		u. s. w.				
5 aus	0	0	0	0	5						
	0	0	0	1	4						
	0	0	0	2	3						
	0	0	1	1	3						
	0	0	1	2	2						
	0	1	1	1	2						
	1	1	1	1	1						

*) Moivre Philos. Trans. 1697 p. 619. Eine recurrente Entwickelung findet man bei Euler Introd. I. §. 76. Ueber die Anzahlen der möglichen Gliederungen einer gegebenen Zahl aus kleinern Zahlen hat Euler Introd. I. c. 16 weitere Untersuchungen angestellt.

Ist r, s, t, u, v eine dieser Complexionen, so hat das Glied

$$a_r\, a_s\, a_t\, a_u\, a_v\, x^{r+s+t+u+v}$$

den Coefficienten 1, wenn 5 gleiche Indices vorhanden sind,
„ „ 5, „ 4 „ „ „ „
„ „ 20, „ 3 „ „ „ „
„ „ 60, „ 2 „ „ „ „
„ „ 30, „ 2 u. 2 „ „ „ „
„ „ 10, „ 2 u. 3 „ „ „ „
„ „ 120, wenn alle Indices verschieden sind.

Die gesuchte Potenz ist demnach:

$$a_0^{\,5} + 5a_0^{\,4}a_1\,x + \left.\begin{matrix}5a_0^{\,4}a_2\\ 10a_0^{\,3}a_1^{\,2}\end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix}5a_0^{\,4}a_3\\ 20a_0^{\,3}a_1\,a_2\\ 10a_0^{\,2}a_1^{\,3}\end{matrix}\right| x^3$$

$$+ \left.\begin{matrix}5a_0^{\,4}a_4\\ 20a_0^{\,3}a_1\,a_3\\ 10a_0^{\,3}a_2^{\,2}\\ 30a_0^{\,2}a_1^{\,2}a_2\\ 5a_0\,a_1^{\,4}\end{matrix}\right| x^4 + \left.\begin{matrix}5a_0^{\,4}a_5\\ 20a_0^{\,3}a_1\,a_4\\ 20a_0^{\,3}a_2\,a_3\\ 30a_0^{\,2}a_1^{\,2}a_3\\ 30a_0^{\,2}a_1\,a_2^{\,2}\\ 20a_0\,a_1^{\,3}a_2\\ a_1^{\,5}\end{matrix}\right| x^5 + \left.\begin{matrix}5a_0^{\,4}a_6\\ 20a_0^{\,3}a_1\,a_5\\ 20a_0^{\,3}a_2\,a_4\\ 10a_0^{\,3}a_3^{\,2}\\ 30a_0^{\,2}a_1^{\,2}a_4\\ 60a_0^{\,2}a_1\,a_2\,a_3\\ 10a_0^{\,2}a_2^{\,3}\\ 20a_0\,a_1^{\,3}a_3\\ 30a_0\,a_1^{\,2}a_2^{\,2}\\ 5a_1^{\,4}a_2\end{matrix}\right| x^6 + \ldots$$

4. Wenn man in der Reihe der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jede Größe von allen folgenden subtrahirt, so erhält man $\binom{n}{2}$ Differenzen, deren Product sich auf eine Determinante reducirt, nämlich*)

$$\begin{matrix}(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_n - a_1)\\ \cdot\,(a_3 - a_2)\ldots(a_n - a_2)\\ \ldots\ldots\ldots\\ (a_n - a_{n-1})\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^{\,2} & \ldots & a_1^{\,n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^{\,2} & \ldots & a_2^{\,n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot\\ 1 & a_n & a_n^{\,2} & \ldots & a_n^{\,n-1}\end{vmatrix}$$

Beweis. Sind i, k beliebige Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$, und zwar $i < k$; ist P das gesuchte Product, Q das Product der Differenzen, welche die Größen a_i und a_k nicht enthalten, R das Product der Differenzen, welche die Größe a_i, aber nicht a_k enthalten, S das Product der Differenzen, welche die Größe a_k, aber nicht a_i enthalten, so ist $P = QRS(a_k - a_i)$. Wenn nun a_i mit a_k ver-

*) Cauchy's Lehrsatz. Vergl. des Verf. Determ. §. 10.

tauscht wird, so bleibt Q unverändert; RS bleibt unverändert, weil das Product jedes Paares $(a_h - a_i)(a_h - a_k)$ oder $(a_i - a_h)(a_h - a_k)$ oder $(a_i - a_h)(a_k - a_h)$ unverändert bleibt; $a_k - a_i$ aber erhält den entgegengesetzten Werth; demnach erhält P den entgegengesetzten Werth.

In P kommt zunächst als Product aller Minuenden das Glied $a_1{}^0 a_2{}^1 a_3{}^2 \,.\,.\, a_n{}^{n-1}$ vor. Ferner kommt jedes Glied, welches aus $a_1{}^0 a_2{}^1 a_3{}^2 \,.\,.\, a_n{}^{n-1}$ durch Vertauschung der Indices sich bilden läßt, als Product aller Minuenden in einem Product vor, das den Werth P oder $-P$ hat, je nachdem die Permutation der Indices zu den geraden oder ungeraden Permutationen gehört. Daher umfaßt P alle Glieder, welche aus $a_1{}^0\ a_2{}^1\ a_3{}^2 \,.\,.\, a_n{}^{n-1}$ durch Vertauschung der Indices abgeleitet werden können, und zwar positiv oder negativ, je nachdem die Permutationen der Indices gerade oder ungerade sind; mithin thält P alle Glieder der obigen Determinante (§. 26, 1).

Kein Glied von P enthält eine der Größen $a_1, a_2, \,.\,.$ in höherer als $(n - 1)$ter Potenz, weil jede der Größen in $n - 1$ Differenzen vorkommt. Die Glieder von P, worin irgend zwei der Größen gleiche Exponenten haben, sind paarweise entgegengesetzt gleich. Wenn z. B. $a_h{}^\alpha\ a_i{}^\beta\ a_k{}^\gamma \,.\,.$ ein Glied von P bedeutet, so ist $a_i{}^\alpha\ a_h{}^\beta\ a_k{}^\gamma \,.\,.$ ein ein Glied $-P$, und $-a_i{}^\alpha\ a_h{}^\beta\ a_k{}^\gamma \,.\,.$ ein Glied von P. Die Glieder $a_h{}^\alpha\ a_i{}^\beta\ a_k{}^\gamma \,.\,.$ und $-a_i{}^\alpha\ a_h{}^\beta\ a_k{}^\gamma \,.\,.$ sind entgegengesetzt gleich, wenn $\alpha = \beta$. Daher bleiben in P nur die Glieder der obigen Determinante übrig.

Von allen $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ Gliedern des Products bleiben demnach nur die $1\,.\,2 \ldots n$ Glieder der Determinante übrig, also $1\,.\,2\,.\,3$ statt 2^3, $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4$ statt 2^6, $1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5$ statt 2^{10}, u. s. f.

In dem einfachsten Falle ist

$$(b - a)(c - a)(c - b) = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

$$= ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c + ca^2 - c^2a$$

folglich auch

$$1 = \frac{ab}{(c-a)(c-b)} + \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-a)(b-c)}$$

§. 28. Figurirte Zahlen und arithmetische Progressionen.

(Heis §§. 93. 81. 82.)

1. Die Formel $\binom{m+n-1}{m}$, welche als Binomialcoefficient, so wie als Anzahl von Combinationen oder Permutationen in Betracht gezogen worden ist (§. 23 und 25), heißt auch die *n*te figurirte Zahl *m*ter Ordnung *). Die Reihe der figurirten Zahlen *m*ter Ordnung ist demnach

$$\binom{m}{m}\ \binom{m+1}{m}\ \binom{m+2}{m}\ \ldots\ \binom{m+n-1}{m}\ \ldots$$

Die erste figurirte Zahl jeder Ordnung ist 1. Die figurirten Zahlen erster Ordnung sind die natürlichen Zahlen. Die *n*te figurirte Zahl *m*ter Ordnung erscheint als Summe der $(n-1)$ten figurirten Zahl der *m*ten Ordnung und der *n*ten figurirten Zahl der $(m-1)$ten Ordnung, oder als Summe der ersten *n* figurirten Zahlen $(m-1)$ter Ordnung, weil (§. 25, 5)

$$\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-2}{m} + \binom{m+n-2}{m-1}$$
$$= \binom{m-1}{m-1} + \binom{m}{m-1} + \binom{m+1}{m-1} + \ldots + \binom{m+n-2}{m-1}$$

Die Summen der ersten 1, 2, 3, . . natürlichen Zahlen sind die figurirten Zahlen zweiter Ordnung; die Summen der ersten 1, 2, 3, . . figurirten Zahlen zweiter Ordnung sind die figurirten Zahlen dritter Ordnung, u. s. w., weil

---

*) Die Bildung der figurirten Zahlen (Polygonalzahlen u. s. w.) durch fortschreitende Summirung wird der Pythagoreischen Schule zugeschrieben. Die ältesten Abhandlungen über dieselben sind von Nicomachus Arithm. II und Diophantus verfaßt, über welche Nesselmann Gesch. d. Algebra p. 201 und 462 Bericht erstattet. Mit Aufsuchung allgemeiner Formeln der figurirten Zahlen haben im 16ten und 17ten Jahrh. sich beschäftigt Maurolycus Arithm. I (1575), Benz Manuductio ad numerum geometricum Ulm 1621, Faulhaber u. A. Vergl. Kästner Gesch. d. Math. 3 p. 120. Die Darstellung einer figurirten Zahl durch die Quotienten von Producten folgender Zahlen ist von Fermat (Brief an Roberval 1636 Nov. 4) entdeckt worden, bald darauf auch von Pascal Traité des ordres numériques. Oeuvres éd. Lahure II p. 440.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \binom{n+1}{2}$$

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{n+2}{3} = \binom{n+3}{4}$$

u. s. w. Demnach sind die figurirten Zahlen der ersten Ordnungen folgende:

1	2	3	4	5	6	7	..
1	3	6	10	15	21	28	..
1	4	10	20	35	56	84	..
1	5	15	35	70	126	210	..

Anmerkung. Die figurirten Zahlen zweiter Ordnung werden Trigonalzahlen, die figurirten Zahlen dritter Ordnung Tetraedralzahlen (dreiseitige Pyramidalzahlen) genannt, so daß die $n$te figurirte Zahl zweiter Ordnung das Dreieck der Zahl n, die $n$te figurirte Zahl dritter Ordnung das Tetraeder der Zahl n heißt. Die Einheiten der $n$ten Trigonalzahl können nämlich in parallele Zeilen zu einem Dreieck zusammengestellt werden, dessen Seiten je n Einheiten enthalten. Die Einheiten der $n$ten Tetraedralzahl können in parallele ähnliche Dreiecke zu einem Tetraeder zusammengestellt werden, dessen Kanten je n Einheiten enthalten. Die figurirten Zahlen höherer Ordnungen sind auf solche Weise nicht construirbar.

2. Wenn man die figurirten Zahlen $m$ter Ordnung der Reihe nach mit den Gliedern der geometrischen Progression $1, v, v^2, v^3, \ldots$ multiplicirt, so erhält man eine Reihe von Gliedern, deren Summe s_m sich durch die aus figurirten Zahlen $(m-1)$ter Ordnung auf dieselbe Art gebildete Summe s_{m-1} ausdrücken läßt. Aus den Reihen

$$s_m = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} v + \ldots + \binom{m+n-1}{m} v^{n-1}$$

$$v s_m = \binom{m}{m} v + \ldots + \binom{m+n-2}{m} v^{n-1} + \binom{m+n-1}{m} v^n$$

ergiebt sich, weil $\binom{k+1}{m} - \binom{k}{m} = \binom{k}{m-1}$ ist (1),

$$(1-v) s_m = s_{m-1} - \binom{m+n-1}{m} v^n$$

indem man die Summe s_{m-1} aus s_m durch Erniedrigung von m um 1 bildet. Vergl. §. 22, 2. Setzt man demnach

$$s_0 = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1}$$
$$s_1 = 1 + 2v + 3v^2 + \ldots + nv^{n-1}$$
$$s_2 = \binom{2}{2} + \binom{3}{2}v + \binom{4}{2}v^2 + \ldots + \binom{n+1}{2}v^{n-1}$$

so findet man

$$(1 - v)s_0 = 1 - v^n$$
$$(1 - v)s_1 = s_0 - nv^n$$
$$(1 - v)s_2 = s_1 - \binom{n+1}{2}v^n$$

3. Wenn man die figurirten Zahlen

$$\binom{m+k-1}{m} \binom{m+k-1}{m+1} \binom{m+k-1}{m+k} \ldots$$

der Reihe nach mit den gegebenen Zahlen $a, b, c, \ldots$ multiplicirt und die Producte addirt, so erhält man eine figurirte Zahl im weitern Sinne

$$f_k = a\binom{m+k-1}{m} + b\binom{m+k-1}{m+1} + c\binom{m+k-1}{m+2} + \ldots$$

Die Summe von n solchen figurirten Zahlen ist wiederum eine figurirte Zahl, deren Formel aus f_k durch Erhöhung von m um 1 entsteht. Denn man hat, weil $\binom{m}{m+1} = 0$,

$$f_1 = a\binom{m}{m}$$
$$f_2 = a\binom{m+1}{m} \quad + b\binom{m+1}{m+1}$$
$$f_3 = a\binom{m+2}{m} \quad + b\binom{m+2}{m+1} \quad + c\binom{m+2}{m+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = a\binom{m+n-1}{m} + b\binom{m+n-1}{m+1} + c\binom{m+n-1}{m+2} + \ldots$$

man findet durch Addition der Colonnen (1) die Summe

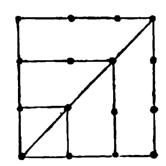
$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n$$
$$= a\binom{m+n}{m+1} + b\binom{m+n}{m+2} + c\binom{m+n}{m+3} + \ldots$$

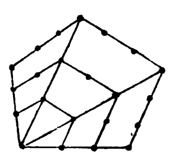
4. Zu den figurirten Zahlen im weitern Sinne gehören die sogenannten **Polygonalzahlen**, **Pyramidalzahlen**, **Polyedralzahlen**.

I. Unter dem p Eck der Zahl n (der $n$ten $p$eckigen Zahl) versteht man die Summe von n Gliedern der Reihe

$$1,\quad 1+p-2,\quad 1+2(p-2),\quad 1+3(p-2),\,..$$

deren Einheiten zu ähnlichen pEcken mit einem gemeinschaftlichen Scheitel zusammengestellt werden können, wie folgt:





Diese Summe besteht aus n Einheiten und aus $p-2$ Dreiecken von $n-1$ (1), also ist

$$p\text{Eck von } n = n + (p-2)\binom{n}{2}.$$

Die Dreiecke der Zahlen sind von den figurirten Zahlen der 2ten Ordnung nicht verschieden, die Vierecke der Zahlen stimmen mit den Quadratzahlen überein, weil

$$n + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2},\quad n + 2\binom{n}{2} - n^2.$$

Die Fünfecke, Sechsecke der Zahlen 1, 2, . ., n sind

$$1,\quad 5,\quad 12,\quad 22,\quad 35,\,..,\ \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$1,\quad 6,\quad 15,\quad 28,\quad 45,\,..,\ n(2n-1).$$

II. Unter der $p$seitigen Pyramide der Zahl n versteht man die Summe der pEcke von den Zahlen 1 bis n, deren Einheiten zu ähnlichen $p$seitigen Pyramiden mit gemeinschaftlicher Spitze zusammengestellt werden können. Nach (3) ist

$$p\text{seitige Pyramide von } n = \binom{n+1}{2} + (p-2)\binom{n+1}{3}.$$

Die 3seitigen Pyramiden der natürlichen Zahlen sind von den figurirten Zahlen der 3ten Ordnung nicht verschieden. Die 4seitigen, 5seitigen, 6seitigen Pyramiden der natürlichen Zahlen sind

$$1,\quad 5,\quad 14,\quad 30,\quad 55,\,..,\ \binom{n+1}{2}\frac{2n+1}{3}$$

$$1,\quad 6,\quad 18,\quad 40,\quad 75,\,..,\ \binom{n+1}{2}n$$

$$1,\quad 7,\quad 22,\quad 50,\quad 95,\,..,\ \binom{n+1}{2}\frac{4n-1}{3}$$

Ein Kugelhaufen aus rectangulären Schichten, der oben in eine Reihe Kugeln endet, auf dessen Basis in der Breite n, in der Länge $n+r$ Kugeln liegen, enthält eine Anzahl Kugeln, die aus der 4seitigen Pyramide von n und aus r Dreiecken von n besteht, also

$$\binom{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+r\right)$$

ist. Den Rücken bilden $1+r$ Kugeln.

III. Unter einer *nten Polyedralzahl* versteht man die Summe von n Gliedern, deren jedes aus Polygonalzahlen so besteht, daß die Einheiten der Polyedralzahlen zu ähnlichen Polyedern mit einer gemeinschaftlichen Ecke zusammengestellt werden können. Wenn das Polyeder e Ecken, f Flächen, k Kanten hat und die gemeinschaftliche Ecke der ähnlichen Polyeder $g$seitig ist, so umfaßt die Differenz der Polyeder von n und $n-1$ zunächst $e-1$ Einheiten an den nicht gemeinschaftlichen Ecken, dann $(k-g)(n-2)$ Einheiten auf den nicht gemeinschaftlichen Kanten, endlich $f-g$ Polygone der Zahl $n-2$ auf den nicht gemeinschaftlichen Flächen. Z. B. das Hexaeder der Zahl n ist die Summe von n Gliedern der Reihe

$$1, \quad 7, \quad 7+9+3, \quad 7+9.2+3.\text{Viereck } 2,$$
$$7+9.3+3.\text{Viereck } 3, \quad 7+9.4+3.\text{Viereck } 4, \ldots$$

und besteht demnach aus 1, aus $7(n-1)$, aus der 9fachen Summe der Zahlen von 1 bis $n-2$, aus der 3fachen Summe der Vierecke von 1 bis $n-2$. Daher findet man

$$\text{Hexaeder von } n = 1 + 7(n-1) + 12\binom{n-1}{2} + 6\binom{n-1}{3}$$
$$= n + 6\binom{n+1}{3} = n^3$$

und die Summe der Hexaeder von $1, 2, \ldots, n$

$$\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{2}^2$$

5. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine *arithmetische Progression* bilden, wenn die Differenzen der auf einander folgenden Größen einander gleich sind. Eine arithmetische Progression ist durch 2 Elemente bestimmt; ist z. B. a das Anfangsglied, d die Differenz der folgenden Glieder, so ist die arithmetische Progression bis zum $n$ten Gliede folgende:

$$a, \quad a+d, \quad a+2d, \ldots, a+(n-1)d.$$

Die Summe der n ersten Glieder ist (3)

$$na + \binom{n}{2}d = \frac{a + [a + (n-1)d]}{2}\, n$$

d. h. die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes (das arithmetische Mittel derselben) multiplicirt mit der Gliederzahl. Man findet diese Summe auch durch die Bemerkung, daß die ersten Glieder vom Anfang und vom Ende dieselbe Summe geben, als die zweiten Glieder vom Anfaug und vom Ende u. s. f.

Beispiele. Die natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz 1 ist. Die Summe der n ersten Zahlen ist $\binom{n+1}{2}$.

Die ungeraden Zahlen bilden eine arithmetische Progression, deren Anfangsglied 1 und deren Differenz 2 ist. Die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist n^2.

Auch die ungeraden Potenzen können durch Summirung bestimmter Mengen von folgenden ungeraden Zahlen gefunden werden. Denn die n^a folgenden ungeraden Zahlen

$$(n-1)n^a + 1,\ (n-1)n^a + 3, \ldots, (n-1)n^a + 1 + 2(n^a-1)$$

geben die Summe

$$[(n-1)n^a + 1 + n^a - 1]n^a = n^{2a+1}.$$

Insbesondere ist $1^3 = 1$, $2^3 = 3 + 5$, $3^3 = 7 + 9 + 11$, u. s. w Also ist die Summe der Cuben*)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

gleich der Summe der $\binom{n+1}{2}$ ersten ungeraden Zahlen. Die letzte dieser Zahlen ist $2\binom{n+1}{2} - 1$, folglich die Summe $\binom{n+1}{2}^2$, wie oben (4).

6. Von einer Reihe von Größen sagt man, daß sie eine arithmetische Progression 2ter, 3ter, .. Ordnung bilden, wenn die Differenzen der auf einander folgenden Größen eine arithmetische Progression 1ter, 2ter, .. Ordnung bilden. Sind $t_1, t_2, t_3, \ldots$ die gegebenen Größen, so bilde man die Reihe der ersten Differenzen

$$t_2 - t_1 = t_{1,1},\quad t_3 - t_2 = t_{2,1},\quad t_4 - t_3 = t_{3,1}, \ldots$$

die Reihe der zweiten Differenzen d. i. die Differenzen der auf einander folgenden ersten Differenzen

$$t_{2,1} - t_{1,1} = t_{1,2},\ t_{3,1} - t_{2,1} = t_{2,2},\ t_{4,1} - t_{3,1} = t_{3,2}, \ldots$$

---

*) Diese Bemerkung ist im Alterthum gemacht worden. Nicomachus Arithm. II, 20.

die Reihe der dritten Differenzen

$t_{2,2} - t_{1,2} = t_{1,3},\ t_{3,2} - t_{2,2} = t_{2,3},\ t_{4,2} - t_{3,2} = t_{3,3}, \ldots$

u. s. w. Wenn die Reihe der $m$ten Differenzen aus gleichen Gliedern besteht, so ist die Reihe der gegebenen Größen eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung*). Z. B.

Gegebene Größen:	1	8	27	64	125	216
Erste Differenzen:		7	19	37	61	91
Zweite Differenzen:			12	18	24	30
Dritte Differenzen:				6	6	6

Die Zahlen 1, 8, 27, . ., bilden eine arithmetische Progression 3ter Ordnung, weil ihre 3ten Differenzen einander gleich sind.

Die figurirten Zahlen $m$ter Ordnung bilden eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, weil ihre ersten Differenzen figurirte Zahlen $(m-1)$ter Ordnung (1), folglich ihre $(m-1)$ten Differenzen die natürlichen Zahlen sind, welche eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden.

7. Aus dem Anfangsgliede und den Anfangsdifferenzen d. h. aus den Anfangsgliedern der Reihen der 1ten, 2ten, 3ten, . . Differenzen lassen sich die Glieder einer arithmetischen Progression höherer Ordnung und die Summe der ersten n Glieder derselben berechnen. Wenn a_0 das Anfangsglied der gesuchten Progression ist, a_1 die erste ihrer 1ten Differenzen, a_2 die erste ihrer 2ten Differenzen, . . , a_m der gemeinschaftliche Werth ihrer $m$ten (letzten) Differenzen, so ist das $n$te Glied der gesuchten Progression**)

$$a_0 + (n-1)a_1 + \binom{n-1}{2}a_2 + \ldots + \binom{n-1}{m}a_m$$

und die Summe ihrer n ersten Glieder

$$na_0 + \binom{n}{2}a_1 + \binom{n}{3}a_2 + \ldots + \binom{n}{m+1}a_m$$

Beweis. Die Reihe der $(r-1)$ten Differenzen wird gebildet, indem man zu dem bekannten Anfangsgliede derselben die ersten 1, 2, 3, . . Glieder aus der Reihe der $r$ten Differenzen addirt (6)

*) Die Reihen der Differenzen, welche zu einer gegebenen Reihe von Größen gehören, sind bei den Untersuchungen über die figurirten Zahlen gebildet (vergl. 1 und 10), und besonders bei der Erfindung der Differentialrechnung in Betracht gezogen worden. Der Name „arithmetische Progressionen höherer Ordnungen" kommt erst im Anfang des 18ten Jahrhunderts vor bei Lagny (Mém. de Paris 1722 p. 264).

**) Diese Formel ist ihrem Inhalte nach von Newton (principia III[b], lemma V.) erfunden, in ihrer heutigen Gestalt von Jac. Bernoulli (ars conj. p. 98) gegeben worden.

$$t_{2,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r}$$
$$t_{3,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r}$$
$$t_{4,r-1} = t_{1,r-1} + t_{1,r} + t_{2,r} + t_{3,r}$$

u. s. w. Daher ist $t_{n,m-1} = a_{m-1} + (n-1)\,a_m$.
Indem man die Summe $t_{1,m-1} + \ldots + t_{n-1,m-1}$ bildet (3) und zu a_{m-2} addirt, findet man weiter

$$t_{n,m-2} = a_{m-2} + (n-1)\,a_{m-1} + \binom{n-1}{2} a_m.$$

Unter der Annahme

$$t_{n,m-k} = a_{m-k} + (n-1)\,a_{m-k+1} + \binom{n-1}{2} a_{m-k+2} + \ldots + \binom{n-1}{k} a_m$$

findet man auf gleiche Weise

$$t_{n,m-k-1} = a_{m-k-1} + (n-1)\,a_{m-k} + \binom{n-1}{2} a_{m-k-1} + \ldots + \binom{n-1}{k+1} a_m.$$

Die angenommene Formel $t_{n,m-k}$ ist richtig, wenn $k = 2$, also gilt sie auch für $k = 3, 4, \ldots, m$. Die Summe der n ersten Glieder der Progression $t_{1,0} + t_{2,0} + \ldots + t_{n,0}$ wird ebenfalls nach (3) berechnet.

8. Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, und a eine gegebene Zahl ist, so bilden $at_1, at_2, at_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz ac. Denn die Differenzen der abgeleiteten Progression entspringen aus den Differenzen der gegebenen Progression durch Multiplication mit a, weil $at_{k+1} - at_k = a(t_{k+1} - t_k)$ u. s. f.; wenn also die $m$ten Differenzen der Reihe $t_1, t_2, t_3, \ldots$ einander gleich sind, so sind auch die $m$ten Differenzen der Reihe $at_1, at_2, at_3, \ldots$ einander gleich und $a$mal so groß als jene.

Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression niederer als $m$ter Ordnung bilden, so bilden $t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung. Denn die $n$te unter den $k$ten Differenzen der abgeleiteten Reihe ist die Summe der $n$ten unter den $k$ten Differenzen der gegebenen Reihen, weil

$$t_{k+1} + u_{k+1} - (t_k + u_k) = (t_{k+1} - t\ ) + (u_{k+1} - u_k)$$

u. s. w. Nach der Voraussetzung verschwinden die $m$ten Differenzen der Reihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$; also sind die $m$ten Differenzen der Reihe $t_1 + u_1, t_2 + u_2, t_3 + u_3, \ldots$ von den $m$ten Differenzen der Reihe $t_1, t_2, t_3, \ldots$ nicht verschieden.

9. Wenn $t_1, t_2, t_3, \ldots$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, so bilden $t_1, 2t_2, 3t_3, \ldots$ eine

arithmetische Progression $(m+1)$ter Ordnung mit der letzten Differenz $(m+1)c$.

Beweis. Für die abgeleitete Reihe ist die $n$te unter den 1ten Differenzen nach der angegebenen Bezeichnung (6)

$$(n+1)t_{n+1} - nt_n = n(t_{n+1} - t_n) + t_{n+1} = nt_{n,1} + t_{n+1}$$

und daher die $n$te unter den 2ten Differenzen

$$(n+1)t_{n+1,1} + t_{n+2} - nt_{n,1} - t_{n+1} = nt_{n,2} + 2t_{n+1,1}$$

Angenommen, die $n$te unter den $k$ten Differenzen sei

$$nt_{n,k} + kt_{n+1,k-1}$$

so findet man die $n$te unter den $(k+1)$ten Differenzen

$$(n+1)t_{n+1,k} + kt_{n+2,k-1} - nt_{n,k} - kt_{n+1,k-1}$$
$$= nt_{n,k+1} + (k+1)t_{n+1,k}$$

Nun war die $n$te unter den 2ten Differenzen $nt_{n,2} + 2t_{n+1,1}$, folglich ist die $n$te unter den 3ten, . . , $(m+1)$ten Differenzen

$$nt_{n,3} + 3t_{n+1,2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$nt_{n,m+1} + (m+1)t_{n+1,m}$$

Nach der Voraussetzung ist $t_{n,m+1} = 0$, $t_{1,m} = t_{2,m} = .. = c$, also haben die $(m+1)$ten Differenzen der abgeleiteten Reihe den gemeinschaftlichen Werth $(m+1)c$.

10. Wenn $t_1, t_2, t_3, ..$ eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung mit der letzten Differenz c bilden, $u_1, u_2, u_3, ..$ eine arithmetische Progression erster Ordnung mit der Differenz d, so bilden die Producte $t_1u_1, t_2u_2, t_3u_3, ..$ eine arithmetische Progression $(m+1)$ter Ordnung mit der letzten Differenz $(m+1)cd$.

Es sei $u_n = a + (n-1)d$, so ist

$$t_nu_n = t_n(a-d) + nt_nd.$$

Nun bilden $t_1(a-d)$, $t_2(a-d)$, . . eine Progression $m$ter Ordnung, t_1d, $2t_2d$, . . eine Progression $(m+1)$ter Ordnung (9), folglich t_1u_1, t_2u_2, . . eine Progression $(m+1)$ter Ordnung (8), deren letzte Differenz mit der letzten Differenz der Progression t_1d, $2t_2d$, . . (9) übereinstimmt.

Wenn $u_1, u_2, u_3, ..$ eine arithmetische Progression erster Ordnung mit der Differenz d bilden, so bilden demnach

$u_1^2, u_2^2, u_3^2, ..$ eine arithm. Progr. 2ter Ordnung,
$u_1^3, u_2^3, u_3^3, ..$ eine arithm. Progr. 3ter Ordnung,
$u_1^m, u_2^m, u_3^m, ..$ eine arithm. Progr. $m$ter Ordnung.

Die letzte Differenz der Progression $u_1^m, u_2^m, u_3^m, \ldots$ ist*)

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m d^m.$$

Angenommen, c sei die letzte Differenz der Progression $u_1^k, u_2^k, u_3^k, \ldots$, so ist nach dem Obigen $c(k+1)d$ die letzte Differenz der Progression $u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, u_3^{k+1}, \ldots$ Nun ist $2d^2$ die letzte Differenz der Progression $u_1^2, u_2^2, u_3^2, \ldots$, folglich $1 \,.\, 2 \,.\, 3d^3$ die letzte Differenz der Progression $u_1^3, u_2^3, u_3^3, \ldots$, u. s. w.

Wenn $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine arithmetische Progression erster Ordnung bilden und $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gegebene Zahlen sind, so bilden die Werthe

$$f_1 = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + \ldots + a_m u_1^m$$
$$f_2 = a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + \ldots + a_m u_2^m$$
$$f_3 = a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 + \ldots + a_m u_3^m$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

eine arithmetische Progression $m$ter Ordnung, weil $u_1^2, u_2^2, u_3^2, \ldots$ eine Progression 2ter Ordnung bilden, u. s. w. (8).

11. Weil $1^3, 2^3, 3^3, \ldots$ eine arithmetische Progression 3ter Ordnung (10) mit dem Anfangsglied 1, den Anfangsdifferenzen 7, 12, und der letzten Differenz 6 bilden (6), so läßt sich die Summe $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ nach (7) berechnen. Ihr Werth ist

$$n + 7\binom{n}{2} + 12\binom{n}{3} + 6\binom{n}{4}$$
$$= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}$$
$$= \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+2}{4} = \binom{n+1}{2}^2$$

wie oben (4). Auf diesem Wege wird die Summe $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$ für jeden ganzen positiven Werth von m berechnet**). Leichter ist die recurrente Berechnung, bei der man die Summe der Potenzen der natürlichen Zahlen durch die Summen der niederen Potenzen derselben Zahlen ausdrückt, wie folgt***).

Nach dem binomischen Lehrsatz (§. 23) ist

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \ldots$$

---

*) Diese Bemerkungen sind in der ersten Hälfte des 17ten Jahrhunderts gemacht worden. Vergl. Faulhaber academia algebrae, 1631.

**) Ueber die Lösung dieser Aufgabe siehe Euler Differentialrechnung II cap. 5 und Klügel math. Wörterbuch „Potenz".

***) Die Summe der Quadrate (4, II) kommt bei Archimedes (Spiral. 10) vor. Die Summe der Biquadrate und höhern Potenzen haben Fermat u. A. gefunden. Vergl. die Anm. zu 1.

also insbesondere

$$2^{m+1} = 1^{m+1} + \binom{m+1}{1} 1^m + \binom{m+1}{2} 1^{m-1} + \ldots$$

$$3^{m+1} = 2^{m+1} + \binom{m+1}{1} 2^m + \binom{m+1}{2} 2^{m-1} + \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \ldots$$

Indem man $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m$ durch s_m bezeichnet, findet man durch Addition der Colonnen

$$\text{(I)} \qquad (n+1)^{m+1} = 1 + \binom{m+1}{1} s_m + \binom{m+1}{2} s_{m-} + \ldots$$

eine Reihe, welche mit $\binom{m+1}{m} s_1 + s_0$ schließt, und worin

$$s_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n$$

$$s_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots n = \binom{n+1}{2}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber auch

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} - \ldots$$

also insbesondere

$$0 = 1^{m+1} - \binom{m+1}{1} 1^m + \binom{m+1}{2} 1^{m-1} - \ldots$$

$$1^{m+1} = 2^{m+1} - \binom{m+1}{1} 2^m + \binom{m+1}{2} 2^{m-1} - \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} - \ldots$$

Die Addition ergiebt nach der obigen Bezeichnung

$$\text{(II)} \qquad 0 = n^{m+1} - \binom{m+1}{1} s^m + \binom{m+1}{2} s_{m-1} - \ldots$$

Aus den Relationen (I) und (II) zwischen $s_m, s_{m-1}, \ldots$ folgen durch Addition und durch Subtraction die einfacheren Relationen

$$(n+1)^{m+1} = 1 + n^{m+1} + 2\binom{m+1}{2} s_{m-1} + 2\binom{m+1}{4} s_{m-3} + \ldots$$

$$(n+1)^{m+1} = 1 - n^{m+1} + 2\binom{m+1}{1} s_m + 2\binom{m+1}{3} s_{m-2} + \ldots$$

Insbesondere ist also:

$$(n+1)^3 + n^3 - 1 = 2 \,.\, 3\, s_2 + 2 s_0$$

$$(n+1)^5 + n^5 - 1 = 2 \,.\, 5\, s_4 + 2\binom{5}{3} s_2 + 2 s_0$$

$$(n+1)^7 + n^7 - 1 = 2 \,.\, 7\, s_6 + 2\binom{7}{3} s_4 + 2\binom{7}{5} s_2 + 2 s_0$$

. . . .

$$(n+1)^4 + n^4 - 1 = 2 \,.\, 4\, s_3 + 2 \,.\, 4\, s_1$$

$$(n+1)^6 + n^6 - 1 = 2 \,.\, 6\, s_5 + 2\binom{6}{3} s_3 + 2.6 s_1$$

$$(n+1)^8 + n^8 - 1 = 2 \,.\, 8\, s_7 + 2\binom{8}{3} s_5 + 2\binom{8}{5} s_3 + 2.8 s_1$$

. . . .

Daraus folgt:

$$s_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$s_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{2n^3}{6} - \frac{n}{30}$$

$$s_6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{3n^5}{6} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

. . . .

$$s_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$s_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{12}$$

$$s_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$s_7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

. . . .

Anmerkung. Allgemein hat man

$$s_m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{n^m}{2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 n^{m-1} - \tfrac{1}{4}\binom{m}{3} B_3 n^{m-3} + \tfrac{1}{6}\binom{m}{5} B_5 n^{m-5} - \,.\,.,$$

worin die Coefficienten $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_3 = \frac{1}{30}$, $B_5 = \frac{1}{42}$, . . von Euler die Bernoulli'schen Zahlen genannt worden sind nach Jacob Bernoulli, der in seiner Ars conjectandi p. 97 die Werthe von s_1, s_2, s_3, . . in aufsteigender Ordnung berechnet und den Werth von s_m mitgetheilt hat.

§. 29. Die Wahrscheinlichkeit.

(Heis §. 91.)

1. Wenn unter gegebenen Umständen von n Ereignissen A, B, C, . . eines wie das andere möglich ist, aber nur eines wirklich eintreten wird, entweder A, oder B, oder C, . . , so haben die einzelnen Ereignisse dieselbe Wahrscheinlichkeit (probabilitas), die bei zunehmender Anzahl n der möglichen Fälle abnimmt. Setzt man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bei n möglichen Ereignissen $= 1 : n$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß von den beiden Ereignissen A und B eines eintritt, $= 2 : n$, u. s. w. Ueberhaupt ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses das Verhältniß der Anzahl der günstigen Fälle (chance), in welchen der Erwartung genügt wird, zu der Anzahl der möglichen Fälle*). Das Ereigniß ist

unmöglich, wenn seine Wahrscheinlichkeit 0;
unwahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit $< \frac{1}{2}$;
ungewiß, wenn seine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$;
wahrscheinlich, wenn seine Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{2}$;
gewiß, wenn seine Wahrscheinlichkeit 1 ist.

Beispiel 1. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine bestimmte Nummer zu werfen, ist $\frac{1}{6}$. Zwei Würfel können auf 6^2 verschiedene Arten fallen. Unter diesen Würfen sind 6 Päsche, und 6 Würfe, deren Nummern die Summe 7 geben. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln einen Pasch zu werfen, $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$. Ebensogroß ist die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen.

Beispiel 2. Fünf Würfel können auf 6^5 verschiedene Arten fallen. Unter diesen Würfen kommen 3 gleiche Nummern auf $\binom{5}{3}.6.5.4$ verschiedene Arten vor, weil 3 bestimmte Nummern auf je 3 Würfeln stehen können, und weil 3 gleiche Nummern 6fach da sind, während der 4te Würfel eine der übrigen 5, der 5te eine der übrigen 4 Nummern

---

*) Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung wurden zuerst um die Mitte des 17ten Jahrhunderts gestellt und gelöst, namentlich von Fermat und Pascal 1654 (Pascal oeuvres éd. Lahure II, p. 392. 429). Die Begründung und Erweiterung solcher Berechnungen hat Hugens 1657 in der Abhandlung de ratiociniis in ludo aleae begonnen. Genauere Ausführungen dieser Theorie verdankt man Jacob Bernoulli (ars conjectandi 1713, wo zuerst probabilitas, gradus certitudinis p 211 vorkommt) und Moivre (doctrine of chances 1717, vollständiger 1738). Weiteres findet man bei Laplace théorie anal. des probab. 1812. 3me éd. 1820.

zeigt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit 5 Würfeln 3 gleiche Nummern zu werfen,

$$\frac{\binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} = \frac{25}{162} = \frac{1}{6,48}.$$

Beispiel 3. Von 52 Blättern, deren je 13 von einer Farbe sind, können 3 auf $\binom{52}{3}$ verschiedene Arten gezogen werden. Diese Blätter sind $\binom{13}{3}$mal von derselben bestimmten Farbe. Also ist die Wahrscheinlichkeit, 3 gleichfarbige Blätter zu ziehen,

$$4\binom{13}{3} : \binom{52}{3} = \frac{22}{425} = \frac{1}{19,32}.$$

Beispiel 4. Von 90 Nummern können 5 auf $\binom{90}{5}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei erscheinen von 12 besetzten Nummern 3 auf $\binom{12}{3}$ verschiedene Arten mit irgend 2 von den 78 unbesetzten Nummern, mithin $\binom{12}{3}\binom{78}{2}$mal. Also ist die Wahrscheinlichkeit, bei 12 besetzten Nummern eine Terne zu gewinnen.

$$\binom{12}{3}\binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{66,52}.$$

Wenn man alle Ternen der 12 Nummern besetzt, so gewinnt man, so oft eine jener Ternen mit irgend 2 der übrigen Nummern gezogen wird, mithin bei $\binom{12}{3}\binom{87}{2}$ Ziehungen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine besetzte Terne zu gewinnen,

$$\binom{12}{3}\binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{53,4}.$$

Beispiel 5. Wenn in einer Urne a schwarze, b weiße, c rothe Kugeln sich befinden, so können $\alpha + \beta + \gamma$ Kugeln auf $\binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei kann eine Combination von α schwarzen Kugeln zugleich mit einer Combination von β weißen Kugeln und einer Combination von γ rothen Kugeln $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}$mal vorkommen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug α schwarze, β weiße, γ rothe Kugeln zu erhalten,

$$\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma} : \binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Beispiel 6. Von n Kugeln, die in einer Urne liegen, kann man irgend wieviele auf

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots$$

verschiedene Arten ergreifen; eine ungerade Anzahl auf

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

verschiedene Arten, eine gerade Anzahl auf

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots$$

verschiedene Arten. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatz (§. 23, 4 für $x = \pm 1$)

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots = 2^n$$

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = 0,$$

folglich

$$2 + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \ldots = 2^n$$

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + \ldots = 2^n,$$

oder

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2^{n-1} - 1$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.$$

Also sind die Wahrscheinlichkeiten, eine gerade oder eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}, \quad \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe **nicht** eintritt, ergänzen sich zu 1 (Gewißheit). Gesetzt, unter n Fällen sind m Fälle, in denen das Ereigniß eintritt, so giebt es unter n Fällen $n - m$ Fälle, in denen das Ereigniß nicht eintritt. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{m}{n}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintritt,

$$\frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

zeigt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit 5 Würfeln 3 gleiche Nummern zu werfen,

$$\frac{\binom{5}{3} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6^5} = \frac{25}{162} = \frac{1}{6{,}48}.$$

Beispiel 3. Von 52 Blättern, deren je 13 von einer Farbe sind, können 3 auf $\binom{52}{3}$ verschiedene Arten gezogen werden. Diese Blätter sind $\binom{13}{3}$mal von derselben bestimmten Farbe. Also ist die Wahrscheinlichkeit, 3 gleichfarbige Blätter zu ziehen,

$$4\binom{13}{3} : \binom{52}{3} = \frac{22}{425} = \frac{1}{19{,}32}.$$

Beispiel 4. Von 90 Nummern können 5 auf $\binom{90}{5}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei erscheinen von 12 besetzten Nummern 3 auf $\binom{12}{3}$ verschiedene Arten mit irgend 2 von den 78 unbesetzten Nummern, mithin $\binom{12}{3}\binom{78}{2}$mal. Also ist die Wahrscheinlichkeit, bei 12 besetzten Nummern eine Terne zu gewinnen.

$$\binom{12}{3}\binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{66{,}52}.$$

Wenn man alle Ternen der 12 Nummern besetzt, so gewinnt man, so oft eine jener Ternen mit irgend 2 der übrigen Nummern gezogen wird, mithin bei $\binom{12}{3}\binom{87}{2}$ Ziehungen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine besetzte Terne zu gewinnen,

$$\binom{12}{3}\binom{87}{2} : \binom{90}{5} = \frac{1}{53{,}4}.$$

Beispiel 5. Wenn in einer Urne a schwarze, b weiße, c rothe Kugeln sich befinden, so können $\alpha + \beta + \gamma$ Kugeln auf $\binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}$ verschiedene Arten gezogen werden. Dabei kann eine Combination von α schwarzen Kugeln zugleich mit einer Combination von β weißen Kugeln und einer Combination von γ rothen Kugeln $\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}$mal vorkommen. Also ist die Wahrscheinlichkeit, auf einen Zug α schwarze, β weiße, γ rothe Kugeln zu erhalten,

$$\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma} : \binom{a+b+c}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Beispiel 6. Von n Kugeln, die in einer Urne liegen, kann man irgend wieviele auf

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots$$

verschiedene Arten ergreifen; eine ungerade Anzahl auf

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$$

verschiedene Arten, eine gerade Anzahl auf

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots$$

verschiedene Arten. Nun ist nach dem binomischen Lehrsatz (§. 23, 4 für $x = \pm 1$)

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots = 2^n$$

$$1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots = 0,$$

folglich

$$2 + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{4} + \ldots = 2^n$$

$$2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + \ldots = 2^n,$$

oder

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots = 2^{n-1} - 1$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.$$

Also sind die Wahrscheinlichkeiten, eine gerade oder eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$\frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}, \quad \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintritt, ergänzen sich zu 1 (Gewißheit). Gesetzt, unter n Fällen sind m Fälle, in denen das Ereigniß eintritt, so giebt es unter n Fällen $n - m$ Fälle, in denen das Ereigniß nicht eintritt. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{m}{n}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß dasselbe nicht eintritt,

$$\frac{n - m}{n} = 1 - \frac{m}{n}.$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln 7 zu werfen, ist $\frac{1}{6}$ und die Wahrscheinlichkeit, nicht 7 zu werfen, ist $\frac{5}{6}$.

3. Die Wahrscheinlichkeit, daß unter den von einander unabhängigen Ereignissen $E, F, G, \ldots$ irgend eines eintritt, entweder E, oder F, oder $G, \ldots$, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Wenn E, F, G einzeln die Wahrscheinlichkeiten p, q, r haben, und überhaupt unter N Fällen m_1 Fälle sind, in denen E eintritt, m_2 Fälle, in denen F eintritt, m_3 Fälle, in denen G eintritt, so giebt es unter N Fällen $m_1 + m_2 + m_3$ Fälle, in denen eines der Ereignisse E, F, G eintritt. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E, oder F, oder G eintritt,

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N}$$
$$= p + q + r.$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln entweder einen Pasch oder 7 zu werfen, ist $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit 2 Würfeln entweder 7, oder 8, oder 9 zu werfen, ist $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} = \frac{5}{12}$.

4. Die Ereignisse $E, F, G, \ldots$ heißen conträr, wenn es gewiß ist, daß eines derselben eintritt. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E, oder F, oder $G, \ldots$ eintritt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse (3), und diese hat den Werth 1, weil $m_1 + m_2 + m_3 \ldots = N$. Also sind die Ereignisse $E, F, G, \ldots$ conträr, wenn die Summe ihrer Wahrscheinlichkeit den Werth 1 (Gewißheit) hat.

Insbesondere sind E und Nicht-E conträr, d. h. es ist gewiß, daß entweder E eintritt, oder E nicht eintritt. In der That ergänzen sich nach (2) die Wahrscheinlichkeiten von E und von Nicht-E zu 1.

5. Bei den Ereignissen $E, F, G, \ldots$ kann die relative Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E in Betracht gezogen werden, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß unter den Ereignissen $E, F, G, \ldots$ das Ereigniß E eintritt. Diese relative Wahrscheinlichkeit von E ist das Verhältniß der Wahrscheinlichkeit von E zu der Wahrscheinlichkeit, daß eines der Ereignisse $E, F, G, \ldots$ eintritt. Denn nach den obigen Voraussetzungen (3) giebt es unter $m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$ Fällen m_1 Fälle, in denen E eintritt; also ist die relative Wahrscheinlichkeit von E

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\frac{m_1}{N}}{\frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N} + \ldots}$$

$$= \frac{p}{p + q + r + \ldots}.$$

Z. B. Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln 3 gleiche Nummern zu werfen, ist $\frac{6}{6^3}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit denselben Würfeln nur 2 gleiche Nummern zu werfen, ist $\binom{3}{2}\frac{6 \cdot 5}{6^3}$. Vergl. Beisp. 2 in (1). Daher ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln vielmehr 2 gleiche Nummern als 3 gleiche Nummern zu werfen,

$$\frac{3 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 5 + 6} = \frac{15}{16}.$$

Wenn die gegebenen Ereignisse conträr sind (4), so ist die relative Wahrscheinlichkeit eines unter ihnen von der absoluten Wahrscheinlichkeit desselben nicht verschieden.

6. Die Wahrscheinlichkeit, daß die von einander unabhängigen Ereignisse E, F, G, .. zusammentreffen d. h. gleichzeitig oder in einer bestimmten Ordnung nach einander eintreten, ist das Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Beweis. Wenn unter n Fällen m Fälle sind, in denen E eintritt (nicht F), und unter n_1 Fällen m_1 Fälle, in denen F eintritt (nicht E), so giebt es unter nn_1 Fällen, in denen die Fälle der ersten Art mit den Fällen der zweiten Art zusammentreffen können, mm_1 Fälle, in denen ein Eintritt von E mit einem Eintritt von F zusammentrifft. Also ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von E und F (des zusammengesetzten Ereignisses EF)

$$\frac{mm_1}{nn_1} = \frac{m}{n}\,\frac{m_1}{n_1}.$$

Haben die Ereignisse E, F, G einzeln die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, so hat das Zusammentreffen von E und F mit G (das Ereigniß EFG) die Wahrscheinlichkeit

$$(pq)r = pqr. \quad \text{U. s. w.}$$

Beispiel 1. Wenn die Urne U 5 weiße und 7 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 6 herausgenommenen Kugeln 2 weiße sind, $\binom{5}{2}\binom{7}{4} : \binom{12}{6}$.

Wenn die Urne V 8 weiße und 10 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 9 herausgenommenen Kugeln 4 weiße sind, $\binom{8}{4}\binom{10}{5} : \binom{18}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß unter 6 aus U genommenen Kugeln 2 weiße, und zugleich unter 9 aus V genommenen Kugeln 4 weiße sich befinden, ist demnach

$$\binom{5}{2}\binom{7}{4}\binom{8}{4}\binom{10}{5} : \binom{12}{6}\binom{18}{9} = \frac{3675}{26\,741} = \frac{1}{7{,}28}.$$

Beispiel 2. Haben die Ereignisse E und F die Wahrscheinlichkeiten p und q, so ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens

von E und F . . . . pq,
von E und Nicht-F . . . . $p(1-q)$,
von Nicht-E und F . . . . $(1-p)q$,
von Nicht-E und Nicht-F . . $(1-p)(1-q)$.

Eines der 4 zusammengesetzten Ereignisse muß eintreten, also sind dieselben conträr (4). In der That ist

$$pq + p(1-q) + (1-p)q + (1-p)(1-q) = 1.$$

Beispiel 3. Haben die Ereignisse E, F, G die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß E nicht eintritt und F eintritt, $(1-p)q$; die Wahrscheinlichkeit, daß E und F nicht eintreten und G eintritt, $(1-p)(1-q)r$; also die Wahrscheinlichkeit, daß entweder E eintritt, oder daß F eintritt, wenn E nicht eintritt, oder daß G eintritt, wenn E und F nicht eintreten,

$$p + (1-p)q + (1-p)(1-q)r.$$

Beispiel 4. Wenn die Urne U 5 weiße und 1 schwarze Kugel, und die Urne V 3 weiße und 4 schwarze Kugeln enthält, so ist die Wahrscheinlichkeit, in U zu greifen, $\frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, daß eine aus U genommene Kugel weiß ist, $\frac{5}{6}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ergriffene Kugel aus U und weiß ist, $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$. Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit, daß die ergriffene Kugel aus V und weiß ist $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}$. Die Wahrscheinlichkeit aber, daß eine aus einer von beiden Urnen genommene Kugel weiß ist, hat den Werth (3)

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{7} = \tfrac{53}{84}.$$

Beispiel 5. Werden Versuche angestellt, bei denen entweder E mit der Wahrscheinlichkeit p, oder F mit der Wahrscheinlichkeit q eintritt, so daß E und F conträr sind und die Summe ihrer Wahrscheinlichkeiten $p + q = 1$: dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen $k$mal E und $(n-k)$mal F in einer bestimmten Ordnung eintritt, $p^k q^{n-k}$. Von k Elementen E und $n-k$ Elementen F giebt

es aber $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Permutationen (§. 25, 4), also ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen $k$mal E und $(n-k)$mal F in beliebiger Ordnung eintritt,

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\; p^k q^{n-k}$$

Dabei wird gewiß entweder $n$mal E, oder $(n-1)$mal E und 1mal F, oder $(n-2)$mal E und 2mal F, .., oder 1mal E und $(n-1)$mal F, oder $n$mal F eintreten. In der That haben die Wahrscheinlichkeiten, welche aus der gefundenen Formel entspringen, wenn k die Werthe $n, n-1, .., 1, 0$ erhält, die Summe $(p+q)^n = 1$ (§. 23).

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen wenigstens $k$mal E eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß E $k$mal, $(k+1)$mal, . . ., $n$mal eintritt. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n Versuchen höchstens $(k-1)$mal E eintritt, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten, daß E 0mal, 1mal, .., $(k-1)$mal eintritt. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten ergänzen sich zu 1.

Analoge Bemerkungen gelten für mehr conträre Ereignisse, welche bei einer Reihe von Versuchen mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten.

Beispiel 6. Wenn man die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Würfel die Nummern 1, 2, 3, .. zu werfen, durch $p_1, p_2, p_3, ..$ bezeichnet, so ist $p_1 + p_2 + p_3 + .. = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem solchen Würfel bei n Würfen $k$mal 1, $l$mal 2, $m$mal 3, . . unter der Bedingung $k + l + m + .. = n$ in beliebiger Ordnung zu werfen, ist

$$\frac{n!}{k!\,l!\,m!\,..}\; p_1^{\,k} p_2^{\,l} p_3^{\,m}\; ..$$

Die Wahrscheinlichkeiten aber, die verschiedenen Complexionen der n Würfe zu erhalten, sind die einzelnen Glieder, aus denen die Potenz $(p_1 + p_2 + p_3 + ..)^n$ besteht (§. 27, 2).

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Summe der n geworfenen Nummern s beträgt, ist die Summe der Glieder von $(p_1 + p_2 + p_3 + ..)^n$, bei denen die Summe der Indices von p den Werth s hat. Vertauscht man p_1 mit $p_1 x$, p_2 mit $p_2 x^2$, p_3 mit $p_3 x^3$, . . ., so erscheint dieselbe Wahrscheinlichkeit als Coefficient von x^s in $(p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + ..)^n$; mithin als Coefficient von x^s in $\frac{1}{6^n}(x + x^2 + .. + x^6)^n$, wenn die Würfe mit einem vollkommenen gemeinen Würfel gemacht werden, bei welchem $p_1 = p_2 = .. = \frac{1}{6}$ ist. Vergl. Moivre Misc. anal.

p. 196 und **Euler** de partitione numerorum (Nov. Comm. Petrop. 3 und 14).

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Wurfes mit n gleichen Würfeln ist nicht verschieden von der Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel bei n Würfen dieselbe Complexion der Nummern zu erhalten.

7. Wenn die Ereignisse E, F, G, .. die Wahrscheinlichkeiten p, q, r, .. haben und conträr sind, so daß $p + q + r + .. = 1$; wenn ferner nach Vertrag der Eintritt von E, F, G, .. zur Folge hat, daß die Person A, B, C, .. den Gewinn S erlangt, so gebühren **vor der Entscheidung** den einzelnen Personen die Antheile pS, qS, rS, ... Sind nämlich überhaupt n Fälle möglich, und ebensoviel Personen vorhanden, von denen die 1te, 2te, 3te, .. den Gewinn S erlangt, je nachdem der 1te, 2te, 3te, .. Fall eintritt, so haben alle Personen gleichen Anspruch auf S, folglich gebührt vor der Entscheidung einer jeden Person $\frac{S}{n}$. Wenn nun unter den n Fällen m Fälle sind, in denen das Ereigniß E eintritt, so vereinigt die Person A in sich die Ansprüche von m jener Personen, folglich gebührt ihr vor der Entscheidung $\frac{m}{n} S$ d. i. pS. U. s. f. In der That ist

$$pS + qS + rS + .. = (p + q + r + ..)\, S = S.$$

Die Producte des erwarteten Gewinns mit den Wahrscheinlichkeiten der Erlangung heißen die **Hoffnungen** (partis, exspectationes, sortes) der verschiedenen Personen auf den Gewinn, und verhalten sich zu einander der Reihe nach wie die Wahrscheinlichkeiten, daß der volle Gewinn den einzelnen Theilnehmern zufällt.

Wenn der durch den Eintritt eines der conträren Ereignisse E, F, G, .. von einer der Personen A, B, C, .. zu erlangende Gewinn S von den Theilnehmern des Vertrags aufgebracht werden soll, so müssen die Beiträge derselben pS, qS, rS, .. d. h. ihren Hoffnungen gleich sein, also zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E, F, G, ... welche die verschiedenen Personen erwarten. Dieselben Beiträge sind von A, B, C, .. zu leisten, wenn sie zur Wette oder zum Glücksspiele sich vereinigen mit der Bedingung, daß A, B, C, .. die Summe der Einsätze gewinnt, je nachdem E, F, G, .. eintritt.

Wenn insbesondere A behauptet, daß das Ereigniß E eintreten werde, B aber das Gegentheil behauptet, und beide zu einer **Wette** sich vereinigen, so hat der eine pS, der andere $(1 - p)S$ einzusetzen, d. h. B hat dem A das $\frac{1-p}{p}$fache entgegenzubieten.

Einsatz und Gewinn des Spielers sollen sich verhalten wie die Wahrscheinlichkeiten, zu gewinnen und zu verlieren. Dem Einsatz des Spielers wird von der Lotterie oder Spielbank ein Gewinn entgegengesetzt, der die erforderliche Höhe meist nicht erreicht; man rechnet auf die Lust der Menge am Gewinn ohne Arbeit.

§. 30. Die Kettenbrüche.

(Heis §. 85 ff.)

1. Wenn man aus den Größen a und b durch successive Divisionen die Kette von Gleichungen

$$a = bq + c$$
$$b = cr + d$$
$$c = ds + e$$

u. s. w. bildet, so ist

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{q + \frac{c}{b}}, \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{r + \frac{d}{c}}, \ldots$$

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Diese Entwickelung von $b : a$ heißt ein **Kettenbruch** (fractio continua), gebildet aus den **Gliedern** $\frac{1}{q}, \frac{1}{r}, \frac{1}{s}, \ldots$, und wird deshalb auch wie folgt bezeichnet*)

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{q} \dot{+} \frac{1}{r} \dot{+} \frac{1}{s} \dot{+} \ldots$$

Die übergesetzten Puncte deuten an, daß das Folgende zu dem jedesmal vorhergehenden Nenner gehört.

---

*) Von den der neuern Zeit angehörigen Kettenbrüchen (fractio continue fracta) hat Lord **Brouncker** um 1605 eine berühmte Anwendung gemacht (Wallis opp. I p. 469). Bald darauf gebrauchte **Hugens** die Kettenbrüche und gab eine Theorie derselben (Automatum planetarium um 1682 verfaßt). **Euler** hat den Namen fractio continua eingeführt (Comm. Petrop. 9.); der Ausdruck Kettenbruch ist im Anfang des 19ten Jahrh. üblich geworden; die obige Bezeichnung rührt von J. H. T. **Müller** her, Allg. Arithm. 1838. Besondern Zuwachs erhielt die Lehre von den Kettenbrüchen durch **Euler** (Nov. Comm. 9. Acta 1779 I), **Lambert** (Beiträge II, 1 p. 55 und 140), **Lagrange** (Zusätze zur franz. Ausgabe von Euler's Algebra,

Der Kettenbruch bleibt unverändert, wenn man den Zähler und den Nenner eines Gliedes und zugleich den Zähler des folgenden Gliedes mit derselben Zahl multiplicirt, weil z. B.

$$\frac{m}{mr + mx} = \frac{1}{r + x}.$$

2. Aus der allgemeinern Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{l} p_1 u - q_1 u_1 + u_2 = 0 \\ p_2 u_1 - q_2 u_2 + u_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_i u_{i-1} - q_i u_i + u_{i+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

findet man

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1 - \frac{u_2}{u_1}}, \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{q_2 - \frac{u_3}{u_2}}, \ldots$$

und daher den Kettenbruch

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \ldots$$

Die Größen u_2, u_3, u_4, .. können nach und nach sämmtlich durch u und u_1 mit Hülfe von $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ ausgedrückt werden. Aus den Resultaten

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u, \quad u_{i+1} = \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u$$

erhält man dann

$$\frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{u_i}{\mu_i u}, \quad \frac{u_1}{u} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1} u}.$$

Wenn nun $\frac{u_i}{\mu_i}$ und $\frac{u_{i+1}}{\mu_{i+1}}$ entgegengesetzte Zahlen sind, so liegt der Kettenbruch $\frac{u_1}{u}$ zwischen den Grenzen $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ und $\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}}$, welche deshalb Näherungsbrüche heißen. Und wenn u_n verschwindet, so ist $\frac{u_1}{u} = \frac{\lambda_n}{\mu_n}$.

Lyon 1795), Gauß Disq. gen. circa seriem inf. 1812, Möbius Crelle J. 6 p. 215. Die hier mitgetheilte Auffassung dieser Lehre hat man Scheibner zu verdanken. Berichte der Leipz. Ges. d. W. 1864.

Demnach hat man

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{p_1}{q_1}, \qquad \frac{u_2}{u_1} = \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \cdots$$

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2}, \qquad \frac{u_3}{u_2} = \frac{p_3}{q_3} \dot{-} \frac{p_4}{q_4} \dot{-} \cdots$$

$$\frac{\lambda_4}{\mu_4} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2}{q_2} \dot{-} \frac{p_3}{q_3}, \qquad \frac{u_4}{u_3} = \frac{p_4}{q_4} \dot{-} \frac{p_5}{q_5} \dot{-} \cdots$$

u. s. w.

3. Zur Bestimmung der Größen λ_i und μ_i genügt die Bemerkung, daß nach (2) für beliebige Werthe von u und u_1

$$p_i(\mu_{i-1} u_1 - \lambda_{i-1} u) - q_i(\mu_i u_1 - \lambda_i u) + \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u = 0$$

sein muß. Dazu wird erfordert, daß die Coefficienten von u und u_1 verschwinden (Algebra §. 4), d. h.

$$\lambda_{i-1} p_i - \lambda_i q_i + \lambda_{i+1} = 0$$
$$\mu_{i-1} p_i - \mu_i q_i + \mu_{i+1} = 0.$$

Dieses System dient zur successiven Berechnung der Größen λ und μ. Denn man hat

$$u_1 = \mu_1 u_1 - \lambda_1 u, \text{ folglich } \lambda_1 = 0, \quad \mu_1 = 1$$
$$u_2 = \mu_2 u_1 - \lambda_2 u, \text{ folglich } \lambda_2 = p_1, \quad \mu_2 = q_1$$

und demnach

$$\lambda_3 = \lambda_2 q_2 - \lambda_1 p_2 \qquad \mu_3 = \mu_2 q_2 - \mu_1 p_2$$
$$\lambda_4 = \lambda_3 q_3 - \lambda_2 p_3 \qquad \mu_4 = \mu_3 q_3 - \mu_2 p_3$$

u. s. w.

4. Aus dem gefundenen System (3)

$$\lambda_{i-1} p_i - \lambda_i q_i + \lambda_{i+1} = 0$$
$$\mu_{i-1} p_i - \mu_i q_i + \mu_{i+1} = 0$$

folgen die Relationen

$$\lambda_{i+1} \mu_i - \lambda_i \mu_{i+1} = (\lambda_i \mu_{i-1} - \lambda_{i-1} \mu_i) p$$
$$\lambda_{i+1} \mu_{i-1} - \lambda_{i-1} \mu_{i+1} = (\lambda_i \mu_{i-1} - \lambda_{i-1} \mu_i) q_i.$$

Nun ist $\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2 = p_1$, folglich $\lambda_3 \mu_2 - \lambda_2 \mu_3 = p_1 p_2, \ldots$, also

$$\lambda_{i+1} \mu_i - \lambda_i \mu_{i+1} = p_1 p_2 \cdots p_i$$

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{p_1 \cdots p_i}{\mu_i \mu_{i+1}}, \qquad \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = \frac{p_1 \cdots p_{i-1} q_i}{\mu_{i-1} \mu_{i+1}}.$$

Daher ergiebt sich

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} + \left(\frac{\lambda_3}{\mu_3} - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right) + \ldots + \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)$$

$$= \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_1 p_2}{\mu_2 \mu_3} + \frac{p_1 p_2 p_3}{\mu_3 \mu_4} + \ldots + \frac{p_1 \ldots p_i}{\mu_i \mu_{i+1}}$$

zur Auflösung eines Kettenbruchs in ein Polynomium, nach welchem der Kettenbruch beurtheilt werden kann, besonders in dem Falle, daß die Anzahl seiner Glieder unendlich groß ist.

5. Aus dem obigen System (2)

$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$
$$u_{i+1} = \mu_{i+1} u_1 - \lambda_{i+1} u$$

folgen die Relationen

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1} \mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u$$
$$\lambda_{i+1} u_i - \lambda_i u_{i+1} = (\lambda_{i+1} \mu_i - \lambda_i \mu_{i+1}) u_1$$

also (4)

$$\mu_{i+1} u_i - \mu_i u_{i+1} = p_1 \ldots p_i u.$$

Eine ähnliche Relation besteht zwischen 3 beliebigen Größen u und kann aus dem System

$$u_h = \mu_h u_1 - \lambda_h u$$
$$u_i = \mu_i u_1 - \lambda_i u$$
$$u_k = \mu_k u_1 - \lambda_k u$$

abgeleitet werden.

6. Aus den gefundenen Werthen (4) ergiebt sich

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} : \frac{\lambda_i}{\mu_i} - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} = \frac{\mu_{i-1} p_i}{\mu_{i+1}}.$$

Wenn nun die Zahlen $p_2, p_3, \ldots$ negativ und die Zahlen q positiv sind, so wird $\mu_{i+1} > - \mu_{i-1} p_i$ (3) d. h. die Differenzen der folgenden Brüche $\frac{\lambda}{\mu}$ bilden eine fallende Reihe mit abwechselnden Zeichen. Nun ist

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} - \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{p_1 p_2}{\mu_2 \mu_3}$$

negativ, folglich

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} - \frac{\lambda_3}{\mu_3} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} - \frac{\lambda_3}{\mu_3} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} - \frac{\lambda_5}{\mu_5} > \frac{\lambda_6}{\mu_6} - \frac{\lambda_5}{\mu_5} > \cdot\cdot$$

$$\frac{\lambda_2}{\mu_2} > \frac{\lambda_4}{\mu_4} > \frac{\lambda_6}{\mu_6} > \cdot\cdot$$

$$\frac{\lambda_3}{\mu_3} < \frac{\lambda_5}{\mu_5} < \frac{\lambda_7}{\mu_7} < \cdot\cdot$$

7. Wenn die Zahlen p Einheiten und die Zahlen q ganze Zahlen sind, so sind λ_i und μ_i relative Primzahlen. Denn ihr größter gemeinschaftlicher Divisor geht in $\lambda_{i+1}\mu_i - \lambda_i\mu_{i+1}$ auf, und kann demnach (4) eine Einheit nicht übersteigen.

Wenn $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = \ldots = -1$ und $q_1, q_2 \ldots$ positive ganze Zahlen sind, so bilden die Größen $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_2, \mu_3, \ldots$ steigende Reihen, und zwei folgende Näherungsbrüche können nicht den Quotienten ganzer Zahlen a und b einschließen, von denen b zwischen den Nennern der beiden Näherungsbrüche liegt. Wäre

$$\frac{\lambda_i}{\mu_i} < \frac{a}{b} < \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}},$$

$$\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_{i+1}} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} > \frac{a}{b} - \frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ d. h. } \frac{1}{\mu_{i+1}} > \frac{a\mu_i - b\lambda_i}{b},$$

so wäre

$$b > (a\mu_i - b\lambda_i)\mu_{i+1} > \mu_{i+1}$$

weil $a\mu_i - b\lambda_i$ ganz und von 0 verschieden ist.

Beispiel. Um einen Quotienten ganzer Zahlen durch Quotienten kleinerer ganzer Zahlen mit größter Annäherung auszudrücken, verwandelt man ihn nach (1) in einen Kettenbruch und berechnet die Näherungsbrüche. Man findet

$$\frac{5829}{7634} = \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{2} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{9} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{3} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{1} \dot{+} \frac{1}{6} \dot{+} \frac{1}{3}$$

mit den irreduciblen Näherungsbrüchen

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{29}{39}, \frac{32}{43}, \frac{125}{168}, \frac{157}{211}, \frac{282}{379}, \frac{1849}{2485}.$$

Die Brüche $\frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{32}{43}, \ldots$ bilden eine bis zu dem gegebenen Bruch fallende Reihe, die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{29}{39}, \ldots$ eine ebendahin steigende Reihe. Der gegebene Bruch wird durch den Bruch $\frac{125}{168}$ mit dem

Fehler $\frac{1}{168\,.\,211} < \frac{1}{168^2}$ ausgedrückt, und genauer als durch irgend einen Bruch, dessen Nenner 211 nicht erreicht und dessen Zähler eine ganze Zahl ist.

8. Wenn $p_1, p_2, p_3, \ldots$ positive ganze Zahlen sind, so hat der unendliche Kettenbruch

$$\frac{p_1}{p_1+1} \,\dot{-}\, \frac{p_2}{p_2+1} \,\dot{-}\, \frac{p_3}{p_3+1} \,\dot{-}\, \ldots$$

den Werth 1 *). Denn man hat (3)

$$\lambda_{i-1}p_i - \lambda_i(p_i+1) + \lambda_{i+1} = 0,$$
$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = (\lambda_i - \lambda_{i-1})p_i.$$

Nun ist $\lambda_3 - \lambda_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)p_2 = p_1p_2, \ldots$, also $\lambda_{i+1} - \lambda_i = p_1 \ldots p_i$ d. h. $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \mu_2, \mu_3, \ldots$ sind steigende Reihen positiver ganzer Zahlen. Ferner hat man

$$\mu_{i+1} - \lambda_{i+1} = (\mu_i - \lambda_i)(p_i+1) - (\mu_{i-1} - \lambda_{i-1})p_i.$$

Nun ist $\mu_1 - \lambda_1 = 1$, $\mu_2 - \lambda_2 = 1$, $\mu_3 - \lambda_3 = p_2 + 1 - p_2 = 1$, u. s. w. Folglich $1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{1}{\mu_i}$ und

$$\lim \frac{\lambda_i}{\mu_i} = 1, \quad i = \infty.$$

9. Wenn $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ positive ganze Zahlen sind und von einer bestimmten Nummer an $q_i > p_i + 1$, $q_{i+1} > p_{i+1} + 1, \ldots$, so hat der aus unendlich viel positiven oder negativen Gliedern $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$ gebildete Kettenbruch einen *irrationalen* Werth unter 1.

Beweis. Man bilde für den gegebenen Kettenbruch Reste von der Form

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k} \,\dot{\pm}\, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \,\dot{\pm}\, \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}} \,\dot{\pm}\, \ldots$$

Dann hat man

$$\frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{p_k}{q_k \pm \frac{v_{k+1}}{v_k}}, \quad \pm v_{k+1} = v_{k-1}p_k - v_kq_k.$$

---

*) Vergl. Legendre Géom. Note 4.

Also sind, wenn z. B. v_{i-1} und v_i ganze Zahlen sind, alle v ganze Zahlen, und der Kettenbruch hat einen rationalen Werth.

Nach der Voraussetzung ist aber

$$p_i < q_i - 1 < q_i \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$$

folglich

$$\frac{p_i}{q_i \pm \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}} < 1, \quad \frac{p_{i+1}}{q_{i+1} \pm \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}}} < 1, \ldots$$

$$\frac{p_i}{q_i} \dot{\pm} \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} < 1$$

$$\frac{p_i}{q_i} \dot{\pm} \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} \dot{\pm} \frac{p_{i+2}}{q_{i+2}} < 1$$

u. s. w. Also sind $\frac{v_i}{v_{i-1}}, \frac{v_{i+1}}{v_i}, \frac{v_{i+2}}{v_{i+1}}, \ldots$ echte Brüche.

Gesetzt nun, v_{i-1} und v_i wären ganze Zahlen, so bildeten die ganzen Zahlen $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots$ eine fallende Reihe mit der Grenze 0, gegen die Voraussetzung, daß kein Rest des gegebenen Kettenbruchs verschwindet. Demnach kann der Kettenbruch einen rationalen Werth nicht haben.

§. 31. Die Exponentialreihe.

1. Eine unendliche Reihe*) d. h. ein Polynomium von unendlich viel Gliedern $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ ist der Ausdruck einer bestimmten Größe und heißt convergent, wenn die Summe der Glieder, welche dem $n$ten Glied folgen, bei hinreichend großem n beliebig klein ist. Bei mangelnder Convergenz ist die unendliche Reihe kein brauchbarer Ausdruck einer Größe und heißt divergent. Die einfachsten Beispiele convergenter Reihen sind der unendliche Decimalbruch und die unendliche fallende geometrische Progression. Wenn x ein realer echter Bruch ist, so hat die unendliche Reihe $1 + x + x^2 + \ldots$ den Werth $\frac{1}{1-x}$ und wird durch die n ersten Glieder $1 + x + \ldots + x^{n-1}$

*) Series infinita convergens nach Newton, der zuerst unendliche Reihen zur Darstellung von Größen in umfassender Weise angewendet hat.

ausgedrückt mit dem Fehler $\frac{x^n}{1-x}$, der bei hinreichend großem n beliebig klein ist (§. 11, 8. §. 12 und 22).

Wenn $u_h = a_h + ib_h$ complex ist, und wenn von den beiden unendlichen Reihen $a_0 + a_1 + a_2 + ..$ und $b_0 + b_1 + b_2 + ..$ jede für sich convergent ist, so ist die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + ..$ convergent.

Wenn die Complexe u_h den Modul v_h hat, und wenn die unendliche Reihe $v_0 + v_1 + v_2 + ..$ convergent ist, so ist die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + ..$ convergent, weil weder a_h noch b_h die Größe v_h übersteigt (§. 16, 7).

2. Wenn die Glieder $u_0, u_1, u_2, ..$ positiv sind und von u_k an die Glieder einer fallenden geometrischen Progression nicht übersteigen d. h.

$$u_{k+1} \leqq u_k q, \quad u_{k+2} \leqq u_{k+1} q \leqq u_k q^2, \ .. (q < 1)$$

so ist die unendliche Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + ..$ convergent, weil

$$u_{k+r} + u_{k+r+1} + .. \leqq u_k q^r (1 + q + q^2 + ..) \leqq \frac{u_k q^r}{1-q}$$

bei hinreichend großem r beliebig klein ist (1).

Wenn insbesondere keines der positiven Glieder $a_0, a_1 b, a_2 b^2, ..$ die Größe c übersteigt, so ist die unendliche Reihe

$$\text{(I)} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ..$$

convergent bei allen positiven x, welche b nicht erreichen. Denn die Glieder dieser Reihe übersteigen nicht die Glieder der fallenden geometrischen Progression

$$c, \quad c\frac{x}{b}, \quad c\frac{x^2}{b^2}, ..$$

Bei denselben x convergiren zugleich die abgeleiteten Reihen

$$\text{(II)} \quad a_0 x + \tfrac{1}{2} a_1 x^2 + \tfrac{1}{3} a_2 x^3 + .. \text{ d. i. } x(a_0 + \tfrac{1}{2} a_1 x + \tfrac{1}{3} a_2 x^2 + ..)$$

und

$$\text{(III)} \quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ..$$

Die Glieder der Reihe (III) übersteigen nicht die Glieder

$$\frac{c}{b}, \quad 2\frac{c}{b}\frac{x}{b}, \quad 3\frac{c}{b}\frac{x^2}{b^2}, ..$$

welche von einem bestimmten Glied an die Glieder einer fallenden geometrischen Progression nicht erreichen. Denn man findet

$$(k+1)\frac{c}{b}\frac{x^k}{b^k} : k\frac{c}{b}\frac{x^{k-1}}{b^{k-1}} = \frac{k+1}{k}\frac{x}{b} = q$$

$$\frac{k+2}{k+1}\frac{x}{b} < q \text{ (§. 12, 3) u. s. w.}$$

und $q < 1$, wenn $k > \frac{x}{b-x}$.

Wenn die unendliche Reihe (I) complexe Glieder hat, so zieht man die aus den Moduln der Glieder gebildete unendliche Reihe in Betracht*).

3. Eine unendliche Reihe von positiven und negativen Gliedern ist **unbedingt convergent**, wenn die aus den Moduln (positiven Beträgen) aller Glieder gebildete Reihe convergent ist. Wenn aber sowohl die Reihe der positiven Glieder als auch die Reihe der negativen Glieder jede für sich divergent ist, und wenn nur die folgenden Glieder derselben mehr und mehr der Null sich nähern: so kann durch successive Einreihung der (negativen) Glieder der zweiten Reihe zwischen die (positiven) Glieder der ersten Reihe eine **bedingt convergente** unendliche Reihe gebildet werden, deren Werth von der **Anordnung** ihrer Glieder abhängt**).

Damit die unendliche Reihe den beliebig gegebenen positiven Werth C ausdrücke, nehme man so lange Glieder der ersten Reihe, bis die Summe über C steigt, dann so lange Glieder der zweiten Reihe, bis die Summe unter C fällt, u. s. w. mit steter Abwechselung. Der Fehler der Summe übersteigt nicht den Betrag ihres letzten Gliedes und wird nach hinreichender Fortsetzung des angezeigten Verfahrens beliebig klein.

4. Der Werth, welchen $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ bei gegebenem x und unendlich großem m erhält, wird durch die convergente unendliche Reihe ausgedrückt***)

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

---

*) Cauchy Anal. alg. c. 9. Abel Crelle J. 1 p. 313. Briot et Bouquet fonct. doubl. périod. 12.

**) Bemerkung Dirichlet's (Abhandl. der Berl. Acad. 1837 p. 48), erläutert von Riemann 1854 Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe (Gött. Abh. Bd. 13). Vergl. unten §. 32, 6.

***) Euler Introd. I §. 115.

Beweis. Bei ganzen positiven m ist nach §. 23

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + m\frac{x}{m} + m\frac{m-1}{2}\frac{x^2}{m^2} + m\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}\frac{x^3}{m^3} + .$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right) + ..$$

ein Polynomium von $1+m$ Gliedern. Die Glieder desselben übersteigen nicht die Glieder

$$1,\quad x,\quad \frac{x^2}{2},\quad \frac{x^3}{3!},\quad \frac{x^4}{4!}, ..$$

welche von einem bestimmten Glied an die Glieder einer fallenden geometrischen Progression nicht erreichen. Denn man hat

$$\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{x^k}{k!} = \frac{x}{k+1} = q,\quad \frac{x}{k+2} < q, ..$$

und $q < 1$, wenn $k+1 > x$, folglich u. s. w. (2).

5. Für $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ findet man bei unendlich großem m (4)

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + .. = 2,\ 71828..$$

(§. 19, 3. Vergl. §. 12, 6. Gem. Arithm. §. 18) und zwar aus den $1+n$ ersten Gliedern mit einem Fehler, der den $n$ten Theil des letzten Gliedes nicht erreicht, weil

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + .. = \frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ..\right\}$$

$$< \frac{1}{n!}\left\{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + ..\right\} < \frac{1}{n!}\frac{1}{n}$$

Dieser Werth der unendlichen Reihe ist irrational*) und wird nach Euler durch e bezeichnet. Wäre e der Quotient der ganzen Zahlen r und s, so fände man durch Multiplication der Reihe mit $s!$ eine Summe von ganzen Zahlen nebst den Brüchen

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + .. < \frac{1}{s}$$

Nun ist $(r:s)s!$ eine ganze Zahl, also vermag $r:s$ den Werth e nicht vollkommen auszudrücken.

---

*) Die Irrationalität von e und π (s. unten 10), sowie von e^x bei rationalem x wurde zuerst von Lambert 1761 bewiesen (Beiträge II, 1 p. 159. Vergl. Legendre Géom. Note 4). Der hier gegebene einfache Beweis für die Irrationalität von e ist von Fourier geführt worden. S. Stainville Mélanges d' anal. 1815 p. 339.

6. Die zuerst von Newton (Oldenburg an Leibniz 1675 April 12 und 1676 Juli 26) aufgestellte bei beliebigen x convergente unendliche Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

fällt bei realem x mit dem positiven Werth von e^x zusammen und definirt eindeutig die Potenz e^x mit complexem Exponenten. Sie heißt die Exponentialreihe, nachdem die Potenz, insofern sie von dem Exponenten abhängt, eine Exponentialgröße genannt worden war*).

Beweis. Durch die Substitution $m = \mu x$ wird

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu x} = \left[\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu}\right]^x.$$

Bei unendlich großem μ wird m unendlich groß, folglich (4 und 5)

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = e^x.$$

In der That findet man aus

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m \left(1 + \frac{y}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m, \quad z = x + y + \frac{xy}{m}$$

bei unendlich großem m

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Hiermit in Uebereinstimmung ist**)

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$\begin{aligned} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} &+ \ldots \\ + y + xy + \frac{x^2}{2}y &+ \ldots \\ + \frac{y^2}{2} + x\frac{y^2}{2} &+ \ldots \\ + \frac{y^3}{3!} &+ \ldots \\ &+ \ldots \end{aligned}$$

$$= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \ldots$$

---

*) Potenzen in ihrer Abhängigkeit von dem Exponenten wurden von Joh. Bernoulli 1697 unter dem ihm von Leibniz vorgeschlagenen Namen Exponentialgrößen in Betracht gezogen (Opp. I p. 179). Nachdem Joh. Bernoulli seit 1702 logarithmische und cyclometrische Differentiale durch den Gebrauch imaginärer Zahlen in Zusammenhang gebracht hatte, wurden die imaginären Exponenten von Euler eingeführt (Introd. I §. 138. Brief an Goldbach 1741 Dec. 9).

**) Stainville 1819 Gerg. Ann. 9 p. 229.

weil $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ und demnach

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{y}{1} + \frac{n^{n-2}}{(n-2)!}\,\frac{y^2}{2!} + \ldots$$

Bezeichnet man den Werth der unendlichen Reihe, welcher dem Werth x entspricht, durch $f(x)$, so ist $f(x)\,f(y) = f(x+y)$, folglich

$[f(x)]^2 = f(2x)$, $[f(x)]^3 = f(2x)\,f(x) = f(3x)$, $[f(x)]^m = f(mx)$

wenn m eine positive ganze Zahl ist. Ferner

$$[f(x)]^{\frac{1}{m}} = f\left(\frac{x}{m}\right), \text{ weil } \left[f\left(\frac{x}{m}\right)\right]^m = f\left(\frac{x}{m}\,m\right) = f(x)$$

$$[f(x)]^{\frac{2}{m}} = f\left(\frac{2x}{m}\right), \text{ u. s. w.}$$

Und wenn α eine reale positive Zahl ist, so hat man

$$[f(x)]^{-\alpha} = 1 : [f(x)]^{\alpha} = 1 : f(\alpha x) = f(-\alpha x)$$

weil $f(\alpha x)\,f(-\alpha x) = f(0) = 1$. Also ist $[f(1)]^x = f(x)$ bei realen x, u. s. w.

7. Die Complexe $\cos x + i \sin x$, deren Modul 1 ist, wird mit einer realen Zahl α potenzirt, indem man x mit derselben multiplicirt*)

$$(\cos x + i \sin x)^{\alpha} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x.$$

Beweis. Nach Trigon. §. 4 ist $(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$

$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \sin x \cos y)$$
$$= \cos(x+y) + i \sin(x+y)$$

ferner $(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z)$

$$= \cos(x+y+z) + i \sin(x+y+z)$$

u. s. w., also bei positiven ganzen m

$$(\cos x + i \sin x)^m = \cos mx + i \sin mx.$$

Ferner ist bei positiven ganzen n

$$(\cos x + i \sin x)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{nx}{m} + i \sin \frac{nx}{m}$$

weil $\left(\cos \frac{nx}{m} + i \sin \frac{nx}{m}\right)^m = \cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$.

*) Euler Introd. I §. 132 ff.

Und wenn β eine reale positive Zahl ist, so hat man

$$(\cos x + i \sin x)^{-\beta} = 1 : (\cos x + i \sin x)^{-\beta} = 1 : (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$
$$= \cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)$$

weil $[\cos(-\beta x) + i \sin(-\beta x)][\cos\beta x + i \sin\beta x] = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$

Anmerkung. Ebenso ist $(\cos x - i \sin x)^\alpha = \cos \alpha x - i \sin \alpha x$, folglich

$$2 \cos \alpha x = (\cos x + i \sin x)^\alpha + (\cos x - i \sin x)^\alpha$$
$$2 i \sin \alpha x = (\cos x + i \sin x)^\alpha - (\cos x - i \sin x)^\alpha$$

Die Berechnung von $\cos mx$ und $\sin mx$ aus $\cos x$ oder $\sin x$ ist von Vieta (Logist. spec.) begonnen, von Jac. Bernoulli (Mém. de Paris 1702. Opp. II n^0 97) vollendet worden. Vergl. Klügel math. W. 2 p. 613. Die angegebenen scheinbar imaginären Ausdrücke von $\cos mx$ und $\sin mx$ sind es, welche bei Moivre Miscell. anal. 1730 p. 1 vorkommen. Die Potenzirung der Complexen $\cos x + i \sin x$ durch Multiplication des Winkels, der Inhalt des häufig so genannten „Moivre'schen Satzes", ist von Moivre nicht in Betracht gezogen worden.

8. Wenn x der Arcus eines Winkels ist, d. h. der um den Scheitel als Centrum mit der Längeneinheit als Radius dem Winkel eingeschriebene Kreisbogen (das Verhältniß des Winkels zu dem πten Theil von 180°, Trigon. §. 3, 10) so hat man*)

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} \qquad \cos x - i \sin x = e^{-ix}$$
$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Beweis. Wenn ω der Arcus eines spitzen Winkels ist, so ist

$$\sin\omega < \omega < \operatorname{tang}\omega$$

folglich

$$\cos\omega < \frac{\sin\omega}{\omega} < 1$$

mithin sind

$$\delta = 1 - \frac{\sin\omega}{\omega} < 1 - \cos\omega$$

$$\varepsilon = \frac{1 - \cos\omega}{\omega} = \frac{\sin^2\omega}{\omega(1 + \cos\omega)} = \frac{(1 - \delta)^2\omega}{1 + \cos\omega}$$

beliebig klein bei hinreichend kleinen ω. Nun ist (7)

$$\cos x + i \sin x = \left(\cos\frac{x}{m} + i \sin\frac{x}{m}\right)^m$$

*) Die Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ sind von Newton (6) gegeben worden. Ihren Zusammenhang mit der Exponentialreihe hat Euler a. a. O. gezeigt.

und bei hinreichend großem m

$$\sin\frac{x}{m} = \frac{x}{m}(1-\delta) \qquad \cos\frac{x}{m} = 1 - \frac{x}{m}\varepsilon$$

$$\cos x + i\sin x = \left[1 - \frac{ix}{m}\left(1 - \delta + i\varepsilon\right)\right]^m$$

Bei unendlich großem m verschwinden δ und ε, und man behält (4) die convergente unendliche Reihe e^{ix}. U. s. w.

9. Durch die bei realem x gefundenen Ausdrücke (8) werden Cosinus und Sinus einer complexen Zahl x definirt (Euler Mém. de Berlin 1749 p. 278). Man findet

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x$$

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

$$\frac{1-\cos x}{x} \text{ und } \frac{x - \sin x}{x}$$

beliebig klein bei hinreichend kleinem x. Aus den Identitäten

$$(e^{\alpha} + e^{-\alpha})(e^{\beta} + e^{-\beta}) + (e^{\alpha} - e^{-\alpha})(e^{\beta} - e^{-\beta}) = 2(e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta})$$

$$(e^{\alpha} - e^{-\alpha})(e^{\beta} + e^{-\beta}) + (e^{\alpha} + e^{-\alpha})(e^{\beta} - e^{-\beta}) = 2(e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta})$$

erkennt man, daß auch bei complexen x, y

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x+y)$$

also bei realen u, v

$$\cos iv = \tfrac{1}{2}(e^{v} + e^{-v}) \qquad \sin iv = \tfrac{1}{2}i(e^{v} + e^{-v})$$

$$\cos(u + iv) = \cos u \cos iv - \sin u \sin iv$$

$$= \tfrac{1}{2}(e^{v} + e^{-v})\cos u - \tfrac{1}{2}i(e^{v} - e^{-v})\sin u \qquad \text{u. s. w.}$$

Durch Potenzirung und durch Division entwickelt man

$$(2\cos x)^m \qquad (2i\sin x)^m$$

$$\frac{\sin mx}{\sin x} \qquad \frac{\sin 2mx}{\cos x} \qquad \frac{\cos(2m+1)x}{\cos x}$$

wenn m eine positive ganze Zahl ist.

Anmerkung. Die realen Ausdrücke $\cos iv$ und $-i\sin iv$ sind unter den von Riccati herrührenden Namen hyperbolischer Cosinus und Sinus von v betrachtet worden, namentlich von Lambert (Mém. de Berlin 1768 p. 330) und von Gudermann (Crelle J. Bd. 6 ff. Theorie der Potentialfunctionen, Berlin 1833). Tabellen derselben hat Gronau 1863 neu herausgegeben. Vergl. Houël Nouv. Ann. 1864 p. 1.

Nach Analogie der Zerlegung von e^{-x} in den hyperbolischen Cosinus und Sinus von x

$$e^{-x} = \cos ix + i \sin ix = \text{Coh}\, x - \text{Sih}\, x$$

hat man, unter der Voraussetzung, daß α eine eigentliche $m$te Wurzel von 1 ist, die Glieder der Exponentialreihe in m Reihen vertheilt

$$e^{\alpha x} = \varphi_0(x) + \alpha\varphi_1(x) + \alpha^2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha^{m-1}\varphi_{m-1}(x)$$

welche mit Cosinus und Sinus gewisse Eigenschaften gemein haben. Vergl. Olivier Crelle J. 2 p. 243. Hellwig Grunert Archiv 21 p. 43.

10. Während x den realen Weg von 1 bis 2 zurücklegt, ist $\sin x$ positiv, aber $\cos x$ geht ohne Unterbrechung der Continuität aus dem Positiven ins Negative:

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{5.6}\right) + \ldots > 0$$

$$\cos 2 = -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7.8}\right) - \ldots < 0$$

also giebt es zwischen 1 und 2 einen realen Werth x, bei welchem $\cos x$ null ist. Dieser Werth wird durch die üblichen Annäherungsmethoden $= 1{,}570\ldots$ gefunden (Algebra §. 8) und durch $\frac{1}{2}\pi$ bezeichnet (Euler Introd. I §. 126), so daß (9)

$$\cos\tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad \sin\tfrac{1}{2}\pi = 1$$

$$e^{i.\frac{1}{2}\pi} = \cos\tfrac{1}{2}\pi + i\sin\tfrac{1}{2}\pi = i, \quad e^{i.2\pi} = 1$$

$$e^{x+i.2\pi} = e^x e^{i.2\pi} = e^x$$

$$\begin{array}{ll}
\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = -\sin x & \sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x \\
\cos(x + \pi) = -\cos x & \sin(x + \pi) = -\sin x \\
\cos(x + \frac{3}{2}\pi) = \sin x & \sin(x + \frac{3}{2}\pi) = -\sin x \\
\cos(x + 2\pi) = \cos x & \sin(x + 2\pi) = \sin x
\end{array}$$

Demnach sind e^x sowie $\cos x$ und $\sin x$ periodisch, d. h. sie bleiben unverändert, jene, wenn x um $i.2\pi$, diese, wenn x um 2π verändert wird.

Anmerkung. Der kleinste positive Winkel, dessen Cosinus null ist, ist recht, der ihm concentrisch eingeschriebene Kreisbogen beträgt den 4ten Theil der Kreisperipherie. Also ist $\frac{1}{2}\pi$ das Verhältniß des 4ten Theils der Peripherie zum Radius des Kreises, π das Verhältniß der Peripherie zum Diameter (Ludolph'sche Zahl, numerus Ceulenius. Planim. §. 13).

11. Zwei reale Zahlen a und b werden durch eine positive Zahl r und einen Winkel (Arcus) φ ausgedrückt

$$a = r\cos\varphi \qquad b = r\sin\varphi$$

unter den Bedingungen

$$\cot\varphi = \frac{a}{b} \qquad r = \frac{a}{\cos\varphi} = \frac{b}{\sin\varphi} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Wenn a und b positiv sind, so findet man φ zwischen 0 und $\frac{1}{2}\pi$. Wenn a negativ, b positiv, so findet man φ zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π, nachdem man $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch $-\sin(\varphi - \frac{1}{2}\pi)$ und $\cos(\varphi - \frac{1}{2}\pi)$ ersetzt hat. U. s. w.

Demnach wird die complexe Zahl $a + ib$ durch ihren Modul r und ihren Winkel (Arcus) φ ausgedrückt, d. h. durch den Winkel, dessen Scheitel der Nullpunct ist, und dessen Schenkel der eine den Punct 1, der andere den Punct der Complexen enthalten (§. 16, 7):

$$a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Positive reale Zahlen haben den Winkel 0, positive imaginäre Zahlen haben den Winkel $\frac{1}{2}\pi$, negative reale Zahlen haben den Winkel π, negative imaginäre Zahlen haben den Winkel $\frac{3}{2}\pi$, die Winkel von conjugirten Zahlen haben die Summe 2π. Die Zahl bleibt unverändert, wenn ihr Winkel um 2π verändert wird. Der Winkel eines Products ist die Summe der Winkel der Factoren (7). Der Winkel eines Quotienten ist die Differenz der Winkel des Dividenden und des Divisor. Der Winkel einer $n$ten Potenz ist der $n$fache Winkel des Dignandus. Zwei Zahlen können nicht gleich sein, ohne daß ihre Moduln gleich und ihre Winkel gleich oder um ganzmal 2π verschieden sind.

Auf der Zahlen-Ebene seien O und E die Puncte von 0 und 1; wenn die Zahl $c_k = a_k + ib_k$ den Punct P_k hat, so hat sie den Modul $r_k = OP_k$ und den Winkel $\varphi_k = EOP_k$. Die Rechnung lehrt, daß der Modul der Differenz $c_2 = c - c_1$ dem Abstand P_1P gleich ist, und daß der Winkel derselben dem von P_1P mit OE gebildeten Winkel gleich ist. Also ist OP_2 mit P_1P parallel und gleich.

Hieraus folgt, daß der Punct P der Summe $c = c_1 + c_2$ gefunden wird, wenn man der Strecke OP_1 die mit OP_2 parallele und gleiche Strecke P_1P ansetzt, so daß OP die aus OP_1 und OP_2 componirte geometrische Summe ist*). Ueberhaupt, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ reale Zahlen sind, so ist der Punct von

$$\frac{\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \ldots}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots}$$

der Schwerpunct der Puncte $\alpha_1 . P_1, \alpha_2 . P_2, \ldots$

*) Möbius Mechanik des Himmels 1843.

Aus der Proportion $c_1 : c_2 = c_3 : c_4$ folgen die Gleichungen der Moduln und der Winkel

$$r_1 : r_2 = r_3 : r_4 \qquad \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_4 : \varphi_3$$

mithin sind die Dreiecke OP_1P_2 und OP_3P_4 ähnlich und einerlei Sinnes.

Der Modul und der Winkel von $\sqrt[n]{c_1\, c_2\, \ldots}$ sind das geometrische Mittel der Moduln und das arithmetische Mittel der Winkel von c_1, c_2, ...

12. Auf Grund der gezeigten Transformation (11) werden Potenzen, Wurzeln, Logarithmen u. s. w. von $a + ib$ berechnet (Euler Mém. de Berlin 1749 p. 265 ff.). Wenn n real, positiv, ganz ist, so hat man

$$(a + ib)^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{a + ib} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

$$\log(a + ib) = \log r + i(\varphi + 2k\pi) \quad \text{für die Basis } e$$

wobei $r^{\frac{1}{n}}$ positiv real, $\log r$ real, und $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Wenn man k um n verändert, so bleibt die zweite Formel unverändert (10), also findet man nicht mehr als n verschiedene Werthe der $n$ten Wurzel.

Insbesondere ist $\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ und $\log 1 = i . 2k\pi$.

Z. B. $\sqrt[6]{1}$ hat die Werthe

$$1,\ \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{2\pi}{3} \pm i \sin\frac{2\pi}{3},\ \cos\pi \pm i \sin\pi = -1$$

$\sqrt[7]{1}$ hat die Werthe

$$1,\ \cos\frac{2\pi}{7} \pm i \sin\frac{2\pi}{7},\ \cos\frac{4\pi}{7} \pm i \sin\frac{4\pi}{7},\ \cos\frac{6\pi}{7} \pm i \sin\frac{6\pi}{7}$$

Um die Zahl zu berechnen, deren Cosinus den Werth $a + ib$ hat, sucht man die realen u, v, welche der Gleichung $\cos(u + iv) = a + ib$ genügen. Dieselben genügen den Gleichungen (9)

$$\tfrac{1}{2}(e^{-v} + e^{v}) \cos u = a \qquad e^{-v} = \frac{a}{\cos u} + \frac{b}{\sin u}$$

$$\tfrac{1}{2}(e^{-v} - e^{v}) \sin u = b \qquad e^{v} = \frac{a}{\cos u} - \frac{b}{\sin u}$$

$$1 = \left(\frac{a}{\cos u}\right)^2 - \left(\frac{b}{\sin u}\right)^2 \text{ u. s. w.}$$

§. 32. Die Binomialreihe und die Logarithmenreihe.

1. Die Reihe $1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots$, welche bei realen positiven ganzen x endlich ist und den Werth $(1 + h)^x$ darstellt (§. 23), kann bei andern x ohne Ende fortgesetzt werden und convergirt, wenn der Modul von h ein echter Bruch ist*).

Beweis. Wenn $\binom{x}{k}$ und h die Moduln b_k und α haben, so ist der Quotient $b_{k+1}\alpha^{k+1} : b_k\alpha^k$ d. i. $b_{k+1}\alpha : b_k$ der Modul von

$$\binom{x}{k+1}h^{k+1} : \binom{x}{k}h^k = \frac{x-k}{k+1}h = \left(\frac{x+1}{k+1} - 1\right)h$$

Unter der Voraussetzung $\alpha < 1$ ist bei hinreichend großem k der Modul δ von $\frac{x+1}{k+1}$ geringer als $1 - \alpha$, und der gesuchte Quotient geringer als $(1 + \delta)(1 - \delta)$ d. i. $1 - \delta^2$, also die Reihe der Moduln $1 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \ldots$ convergent, u. s. w. (§ 31, 2).

An der Grenze $\alpha = 1$ ist die Convergenz der gegebenen Reihe von x abhängig. Vergl. Abel a. a. O. Heine Crelle's J. 55 p. 279.

2. Bei beliebigen x, y ist identisch**)

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}\binom{y}{1} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{2} + \ldots + \binom{x}{1}\binom{y}{k-1} + \binom{y}{k} = \binom{x+y}{k}$$

Beweis. Die bei realen positiven ganzen x, y geltende Gleichung (§. 25, 5) ist für x vom $k$ten Grade. Derselben genügen aber mehr als k Werthe x, also ist sie eine Identität und gültig bei beliebigen x, y (Algebra §. 10, 3).

In der That ist die gegebene Reihe die Summe der beiden Reihen

$$\binom{x}{k} + \binom{x}{k-1}\binom{y}{1}\frac{k+1}{k} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{2}\frac{k-2}{k} + \ldots$$

$$+ \binom{x}{k-1}\binom{y}{1}\frac{1}{k} \quad + \binom{x}{k-2}\binom{y}{2}\frac{2}{k} \quad + \ldots$$

---

*) Abel Crelle's J. 1 p. 311 ff.
**) Euler. Vergl. §. 23.

und zufolge der Identität $\binom{x}{r} = \binom{x}{r-1}\frac{x-r+1}{r}$ gleich der Summe

$$\binom{x}{k-1}\frac{x-k+1}{k} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{1}\frac{x-k+2}{k-1}\frac{k-1}{k} + \binom{x}{k-3}\binom{y}{2}\frac{x-k+3}{k-2}\frac{k-2}{k} + \ldots$$
$$+\binom{x}{k-1}\frac{y}{k} \qquad + \binom{x}{k-2}\binom{y}{1}\frac{y-1}{2}\frac{2}{k} \qquad + \binom{x}{k-3}\binom{y}{2}\frac{y-2}{3}\frac{3}{k} \qquad + \ldots$$

folglich gleich

$$\frac{x+y-k+1}{k}\left\{\binom{x}{k-1} + \binom{x}{k-2}\binom{y}{1} + \binom{x}{k-3}\binom{y}{2} + \ldots\right\}$$

Wenn nun der dem Werth k entsprechende Werth der gegebenen Reihe durch $f(k)$ bezeichnet wird, so hat man

$$f(k) = \frac{x+y-k+1}{k}f(k-1),\ f(k-1) = \frac{x+y-k+2}{k-1}f(k-2), \ldots, f(1) = \frac{x+y}{1}$$

$$f(x) = \frac{x+y}{1}\,\frac{x+y-1}{2}\ldots\frac{x+y-k+1}{k} = \binom{x+y}{k}$$

3. Die unendliche Reihe $1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots$, wenn sie convergent ist, ergiebt den Werth von $(1+h)^x$, aus welchem durch Multiplication mit den von 1 verschiedenen Werthen von 1^x die übrigen Werthe von $(1+h)^x$ entspringen, und heißt die Binomialreihe*).

Beweis. Durch Multiplication findet man

$$\left\{1 + \binom{x}{1}h + \binom{x}{2}h^2 + \ldots\right\}\left\{1 + \binom{y}{1}h + \binom{y}{2}h^2 + \ldots\right\}$$
$$\begin{aligned} = 1 + \binom{x}{1}h &+ \binom{x}{2}h^2 &+ \binom{x}{3}h^3 &+ \ldots \\ + \binom{y}{1}h &+ \binom{x}{1}\binom{y}{1}h^2 &+ \binom{x}{2}\binom{y}{1}h^3 &+ \ldots \\ &+ \binom{y}{2}h^2 &+ \binom{x}{1}\binom{y}{2}h^3 &+ \ldots \\ & &+ \binom{y}{3}h^3 &+ \ldots \\ & & &+ \ldots \end{aligned}$$
$$= 1 + \binom{x+y}{1}h + \binom{x+y}{2}h^2 + \binom{x+y}{3}h^3 + \ldots$$

*) Das allgemeine Binomialtheorem, eine der ersten großen Entdeckungen Newton's (Brief für Leibniz 1676 Juni 13). Vergl. Euler Nov. Comm. Petrop. 19 p. 103 nebst den §. 23 citirten Stellen, und Abel a. a. O., der die Reihe bei complexen x untersucht hat.

nach (2). Wenn man den dem Werth x entsprechenden Werth der unendlichen Reihe durch $\varphi(x)$ bezeichnet, so hat man die Identität $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x + y)$, aus der man wie oben (§. 31, 6) schließt

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x = (1 + h)^x.$$

Die Binomialreihe dient zur Berechnung einer Wurzel von $1 + h$, wenn der Modul von h ein echter Bruch und x ein realer Bruch ist. Vergl. §. 23, 6.

4. Der natürliche Logarithmus (in Bezug auf die Basis e) von $1 + h$ wird, abgesehen von dem Glied $\log 1$ (§. 19, 4. §. 31, 12), durch

$$(\sqrt[m]{1 + h} - 1)\,m$$

bei hinreichend großem m mit einem beliebig kleinen Fehler ausgedrückt, daher bei solchen h, deren Modul geringer als 1, durch die unendliche Reihe (Logarithmenreihe)

$$h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \tfrac{1}{4}h^4 + \ldots{}^{*})$$

Beweis. Nach §. 31, 4—6 ist bei hinreichend großem m

$$\left(1 + \frac{\log(1 + h)}{m}\right)^m = e^{\log(1+h)} = 1 + h$$

mit einem beliebig kleinen Fehler, folglich

$$\log(1 + h) = (\sqrt[m]{1 + h} - 1)\,m$$

mit einem beliebig kleinen Fehler. Wenn der Modul von h ein echter Bruch ist und wenn $1 : m = x$ gesetzt wird, so ist (3)

$$(\sqrt[m]{1 + h} - 1)\,m = \frac{(1 + h)^x - 1}{x}$$

$$= h - \tfrac{1}{2}h^2(1 - x) + \tfrac{1}{3}h^3(1 - x)(1 - \tfrac{1}{2}x) - \ldots$$

Bei unendlich großem m wird x null, also ohne Fehler

$$\log(1 + h) = h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

Anmerkung. Ein künstlicher Logarithmus hat zu dem natürlichen Logarithmus desselben Numerus ein nur von der Basis abhängiges Verhältniß M (§. 19, 3). Daher ist

$$\mathrm{Log}\, a = M \log a,$$

$$\mathrm{Log}(a + \delta) - \mathrm{Log}\, a = \mathrm{Log}\left(1 + \frac{\delta}{a}\right) = M \log\left(1 + \frac{\delta}{a}\right)$$

$$= M\left(\frac{\delta}{a} - \tfrac{1}{2}\frac{\delta^2}{a^2} + \ldots\right).$$

---

*) Die Reihe wurde zuerst von Nic. Mercator (Logarithmotechnia 1668 pr. 17) und Jac. Gregory (Exercit. geom. 1668) bekannt gemacht; sie war auch

Bei hinreichend kleinem $\delta : a$ genügt das erste Glied der eingeschlossenen Reihe. Also ist die Logarithmendifferenz dem Verhältniß der Numerndifferenz zu dem Numerus um so genauer proportional, je geringer dieses Verhältniß ist. Vergl. §. 20, 4.

5. Aus den Reihen (4)

$$\log(1+h) = \quad h - \tfrac{1}{2}h^2 + \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$
$$\log(1-h) = -h - \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^3 - \ldots$$

folgt durch Subtraction

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h} = h + \tfrac{1}{3}h^3 + \tfrac{1}{5}h^5 + \ldots$$

oder nach der Substitution $\frac{1+h}{1-h} = a, \quad h = \frac{a-1}{a+1}$

$$\tfrac{1}{2}\log a = \frac{a-1}{a+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 + \ldots$$

und insbesondere

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{m}{n} = \frac{m-n}{m+n} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{u+v}{u} = \frac{v}{2u+v} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{v}{2u+v}\right)^3 + \ldots$$

Z. B. $u = 1$, $v = 1$ giebt $\log 2$. Durch Verdopplung findet man $\log 4$, und $u = 4$, $v = 1$ giebt $\log 5 - \log 4$. Daher wird $\log 10 = \log 2 + \log 5$, und

$$1 : \log 10 = 0{,}434\,29 \ldots \text{(§. 19, 3)}.$$

Die für $\frac{1}{2}\log a$ gegebene Reihe convergirt, wenn der Modul von h ein echter Bruch ist, und dazu genügt es, daß der reale Theil von a positiv ist. Denn es sei $a = p + iq$. Der Modul von h ist die positive Quadratwurzel von

$$\frac{(p-1)^2 + q^2}{(p+1)^2 + q^2}$$

und < 1, wenn $(p+1)^2 > (p-1)^2$ d. h. $p > 0$. Wenn der reale Theil von a negativ ist, so hat die complexe Zahl $-a$ einen positiven realen Theil, und $\log a = \log(-1) + \log(-a)$. Vergl. §. 31, 12.

---

von Newton gefunden worden (Brief an Leibniz 1676 Oct. 24). Die jetzt übliche Ableitung der Reihe ist von Halley Philos. Trans. 1695 und Euler Introd. I §. 119 begründet worden.

6. An der Grenze $h = -1$ findet man

$$\log 0 = -1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \ldots = -\infty.$$

In der That ist für ein positives reales n *)

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{2}{2^n}$$

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} < \frac{4}{4^n} \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} > \frac{2}{4^n}$$

$$\frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} > \frac{4}{8^n} \text{ u. s. w.}$$

Daher liegt die Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots$ zwischen den Grenzen

$$1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} + \ldots\right) \text{ und } 1 + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} + \ldots\right).$$

Die eingeschlossene Reihe ist eine geometrische Progression, aber nur dann fallend, wenn $n > 1$. Also ist die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ nicht endlich.

An der Grenze $h = 1$ findet man für log 2 die Reihe

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

welche convergirt, weil

$$(1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \ldots > \tfrac{1}{2}$$
$$1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - \ldots < 1$$

Diese unendliche Reihe ist aber nicht unbedingt convergent (§. 31, 3), weil die Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ divergent ist. Ihr Werth ist vielmehr bedingt durch die Ordnung ihrer Glieder und kann bei bestimmter Einreihung der negativen Glieder zwischen die positiven Glieder jede gegebene Zahl erreichen, in Betracht daß die Reihen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$ und $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots$ divergent sind, von denen die erste mehr als die zweite, und die zweite halb soviel als $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ beträgt. Der Werth dieser unendlichen Reihe ist aber nicht unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder. Man bilde z. B. **)

$$t_k = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}$$

$$u_k = \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k}$$

$$v_k = \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

---

*) Poinsot. S. Stainville Mélanges p. 368.

**) Scheibner über unendliche Reihen 1860 p. 10.

Die unendlichen Reihen $t_1 + t_2 + t_3 + ..$ und $u_1 + u_2 - u_3 + ..$ sind von einander nicht verschieden, während die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + ..$ dieselben Glieder in einer andern Anordnung enthält. Nun ist $v_k - u_k = \frac{1}{2} t_k$ folglich hat die Reihe $v_1 + v_2 + v_3 + ..$ den Werth $\frac{3}{2} \log 2$.

7. Aus den Relationen (§. 31, 8)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

folgt durch Division

$$e^{2ix} = \frac{\cos x + i \sin x}{\cos x - i \sin x} = \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

$$x = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x}$$

Wenn x real positiv ist und $\frac{1}{4}\pi$ nicht übersteigt, so ist

$$x \leqq \tfrac{1}{2}\pi - x, \quad \sin x \leqq \cos x, \quad \operatorname{tang} x \leqq 1$$

Also hat man (5) bei realen x zwischen $-\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{1}{4}\pi$

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{1 + i \operatorname{tang} x}{1 - i \operatorname{tang} x} = i \operatorname{tang} x + \tfrac{1}{3}(i \operatorname{tang} x)^3 + ..$$

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang} x)^3 + \tfrac{1}{5}(\operatorname{tang} x)^5 - .. \text{*)}$$

An der Grenze $\operatorname{tang} x = 1$ findet man für $\frac{1}{4}\pi$ die unendliche Reihe (Leibniz a. a. O.)

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + ..$$

welche bei der gegebenen Anordnung der Glieder gegen den zwischen $\frac{2}{3}$ und 1 liegenden Werth $\frac{1}{4}\pi$ eben noch convergirt.

Leichtere Berechnungen der Zahl π sind von Newton a. a. O. angezeigt worden. Z. B. Aus geometrischen wie aus goniometrischen Gründen hat man $\operatorname{tang} \frac{1}{6}\pi = \sqrt{\frac{1}{3}}$, folglich

$$\tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^{\,3} + \tfrac{1}{5}\sqrt{\tfrac{1}{3}}^{\,5} - ..$$

Oder man setzt $\frac{1}{4}\pi$ aus mehreren stark convergirenden unendlichen Reihen zusammen. Wenn $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$, so ist

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta}{1 - \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta} = 1$$

und zu $\operatorname{tang}\alpha$ ergiebt sich $\operatorname{tang}\beta$, so daß

$$\tfrac{1}{4}\pi = \operatorname{tang}\alpha - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\alpha)^3 + .. + \operatorname{tang}\beta - \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\beta)^3 + .$$

Passende Werthe enthält die folgende Tabelle**)

*) Jac. Gregory. Vergl. den Brief Oldenburg's an Leibniz 1675 April 12. Auch Leibniz (Brief an Oldenburg 1676 Aug. 27) und Newton (Brief an Leibniz 1676 Oct. 24) waren im Besitz dieser Reihe.

**) Vergl. Klügel math. W. I p. 657. Gauß Werke II p. 501.

$\frac{1}{4}\pi$	tang α	tang β
$\alpha + \beta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$2\alpha + \beta$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$
$4\alpha - \beta$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{239}$
$5\alpha + 2\beta$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{79}$

8. Bei complexen Werthen von $h = \alpha e^{i\omega}$, deren Modul α ein echter Bruch ist, wird die Binomialreihe transformirt*), indem man

$$1 - \alpha e^{i\omega} = e^{-\varrho - i\psi}$$

setzt (§. 31, 11). Demnach ist

$$e^{-\varrho}\cos\psi = 1 - \alpha\cos\omega, \quad e^{-\varrho}\sin\psi = \alpha\sin\omega$$

und zwar $\cos\psi$ positiv, mithin ψ ein zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegender Werth von der Art, daß

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\alpha\sin\omega}{1 - \alpha\cos\omega}$$

Der Modul $e^{-\varrho}$ der Zahl $1 - \alpha e^{i\omega}$ ist die positive Quadratwurzel von

$$(1 - \alpha e^{i\omega})(1 - \alpha e^{-i\omega}) = 1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2$$

$$\varrho = \log(1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist (4)

$$\varrho + i\psi = -\log(1 - \alpha e^{i\omega}) = \alpha e^{i\omega} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots$$

$$\varrho - i\psi = -\log(1 - \alpha e^{-i\omega}) = \alpha e^{-i\omega} + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e^{-2i\omega} + \ldots$$

Durch Addition und Subtraction findet man (§. 31, 8)

$$\varrho = \alpha\cos\omega + \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\omega + \ldots$$

$$\psi = \alpha\sin\omega + \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\omega + \ldots$$

Unter diesen Voraussetzungen ist (3)

$$1 - \binom{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \binom{x}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} + \ldots = (1 - \alpha e^{i\omega})^x$$

oder nach Vertauschung von x mit $-x$

$$1 + \frac{x}{1}\alpha e^{i\omega} + \frac{x}{1}\,\frac{x+1}{2}\alpha^2 e^{2i\omega} - \ldots = e^{x(\varrho + i\psi)}$$

folglich bei realem x

$$+ \frac{x}{1}\alpha\cos\omega + \frac{x}{1}\,\frac{x+1}{2}\alpha^2\cos 2\omega + \ldots = (1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}x}\cos x\psi$$

$$\frac{x}{1}\alpha\sin\omega + \frac{x}{1}\,\frac{x+1}{2}\alpha^2\sin 2\omega + \ldots = (1 - 2\alpha\cos\omega + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}x}\sin x\psi$$

*) Vergl. Cauchy Anal. algébr. c. 9. Abel a. a. O. Scheibner in den Vorlesungen.

9. Wenn $a_0, a_1, a_2, \ldots$ real positiv sind und von a_k an eine bis 0 fallende Reihe bilden, und wenn x den Modul 1 aber einen von 0 verschiedenen Winkel hat, so ist die unendliche Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

convergent*). Denn bei hinreichend großem n ist die Reihe

$$(a_n - a_{n+1}) x^{n+1} + (a_{n+1} - a_{n+2}) x^{n+2} + \ldots$$

convergent und zwar beliebig klein, weil die Reihe der Moduln

$$(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \ldots$$

von a_n eine beliebig kleine Differenz hat. Also ist auch

$$a_n x^n - (a_n - a_{n+1}) x^{n+1} - (a_{n+1} - a_{n+2}) x^{n+2} - \ldots$$

$$\text{d. i. } (1 - x)(a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots)$$

beliebig klein.

Dieser Satz lehrt, daß die Reihen ϱ und ψ (8) auch noch an der Grenze $\alpha = 1$ convergiren, wenn ω nicht null ist.

---

*) S. Abel Crelle's J. 1 p. 332. Scheibner über unendliche Reihen p. 9. Dirichlet Liouv. Journ. 1862 p. 253.

Drittes Buch.

Algebra.

---

§. 1. Die Proportionen.

(Heis §. 31—33.)

1. Das Verhältniß $A : B$ (Allg. Arithm. §. 10) der Größe A zu der gleichartigen Größe B ist $\gtreqless 1$, je nachdem $A \gtreqless B$. Indem man A mit den Vielfachen von B oder mit den Vielfachen eines hinreichend kleinen Theiles von B vergleicht, findet man, wenn l, m, n ganze Zahlen bedeuten, entweder $A = lB$, oder $A = \frac{m}{n} B$, oder die Begrenzung

$$\frac{m}{n} B < A < \frac{m+1}{n} B$$

Demnach wird das Verhältniß $A : B$ entweder durch die ganze Zahl l oder durch den Bruch $\frac{m}{n}$ genau ausgedrückt, oder durch die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$ begrenzt mit einem Fehler, der $\frac{1}{n}$ nicht erreicht und bei hinreichend großem n beliebig klein ist. Wenn es bei der Begrenzung bewenden muß, so ist das Verhältniß der Größen irrational (Allg. Arithm. §. 16, 4), und die Größen heißen incommensurabel, während Größen von rationalem Verhältniß commensurabel genannt werden.

Wenn man zur Bestimmung des Verhältnisses von zwei Strecken die kleinere auf die größere so oft als möglich aufträgt, den Rest so oft als möglich auf die kleinere, den zweiten Rest so oft als möglich auf den ersten Rest, u. s. f. und wenn man findet, daß kein Rest in dem vorhergehenden Reste aufgehen kann, so schließt man (Allg. Arithm. §. 13, 3), daß die Strecken incommensurabel sind (Eucl. X, 2). Beispiele: Legendre Géom. III probl. 19 (vergl. Eucl. X, 117), Kunze Planim. 1. Aufl. 170. Bretschneider Grunert Archiv 3 p. 440.

2. Wenn jede Begrenzung des Verhältnisses von einem Paar Größen zugleich eine Begrenzung des Verhältnisses von einem andern Paar Größen ist, so sind die Verhältnisse gleich*).

---

*) Eucl. V. def. 5.

Beweis. Zu jeder gegebenen Zahl n läßt sich eine Zahl m finden, so daß

$$\frac{m}{n} < A : B < \frac{m+1}{n}$$

Wenn nun immer zugleich

$$\frac{m}{n} < C : D < \frac{m+1}{n}$$

so ist $A : B - C : D < \frac{m+1}{n} - C : D < \frac{m+1}{n} - \frac{m}{n}$

folglich

$$A : B - C : D < \frac{1}{n}$$

Wäre aber diese Differenz von Null verschieden, so wäre sie nicht kleiner als der beliebige kleine Bruch $\frac{1}{n}$. Also ist $A : B - C : D = 0$, $A : B = C : D$.

3. Das Verhältniß von zwei Größen wird mittelbar gefunden, indem man das Verhältniß der ersten Größe zu einer geeigneten Hülfsgröße mit dem Verhältniß der Hülfsgröße zu der zweiten Größe multiplicirt. Eucl. VI. def. 5.

$$A : B = (A : M)(M : B).$$

Denn $(A : M)(M : B) B = (A : M) M = A$ (Allg. Arithm. §. 10).

Ebenso ist $A : B = (A : M)(M : N)(N : B)$, u. s. f.

Die Verhältnisse $A : B$ und $B : A$ sind reciprok, weil $(A : B)(B : A) = A : A = 1$ (Allg. Arithm. §. 11, 7).

4. Mehrere Größen verhalten sich zu einander der Reihe nach, wie ihre Verhältnisse zu derselben Hülfsgröße (Einheit):

$$A : B : C = (A : M) : (B : M) : (C : M)$$

d. h. $A : B = (A : M) : (B : M)$,

$A : C = (A : M) : (C : M)$, u. s. w.

Denn $(A : M) : (B : M) = A : B$, weil $(A : B)(B : M) = A : M$ (3).

Wenn insbesondere die erste Größe p solche Theile (Einheiten) enthält, deren die zweite q, die dritte r enthält, so verhalten sich die Größen zu einander der Reihe nach, wie $p : q : r$. Umgekehrt, wenn Größen zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Zahlen p, q, r, so kann die erste $= pM$, die zweite $= qM$, die dritte $= rM$ gesetzt werden, wobei M unbestimmt bleibt.

Man kann die Zahlen $A : M$, $B : M$, $C : M$ sämmtlich mit derselben Zahl multipliciren oder dividiren, ohne ihre Verhältnisse zu einander zu verändern (Allg. Arithm. §. 11, 3). Man multiplicirt sie mit dem gemeinschaftlichen Nenner, wenn sie alle oder zum Theil Brüche sind; man dividirt sie durch ihren größten gemeinschaftlichen Divisor.

5. Proportion (ἀναλογία, proportionalitas) heißt eine Gleichung von Verhältnissen, z. B. $A : B = C : D$*). Die gleichgestellten Größen A und C, B und D werden **homolog** genannt. Das Product der mittlern Größen ist dem Producte der äußern gleich, wobei unter Größe deren Verhältniß zur Einheit verstanden wird. Eucl. V. def. 8. VII, 19.

Wenn $A : B = C : D$, so ist $BC = AD$.

Beweis. $AD : BC$ ist gleichbedeutend mit $(A : B)(D : C)$, weil nach der gegebenen Erklärung $A, B, \ldots$ Zahlen sind. Nun ist $D : C = B : A$, folglich $AD : BC = (A : B)(B : A) = 1$.

6. Die Größen einer Proportion jede durch die homologe dividirt geben gleiche Quotienten. Wenn

$$A : B : C = F : G : H$$

so ist

$$A : F = B : G = C : H$$

und umgekehrt. Vorausgesetzt wird dabei, daß F, G, H Größen derselben Art sind wie A, B, C oder daß sie Zahlen bedeuten (die Verhältnisse der Größen F, G, H zur Einheit). Eucl. V, 16. VII, 13.

Beweis. $A : F = (A : B)(B : F)$ nach (3). Nun ist $A : B = F : G$ vorausgesetzt, folglich $A : F = (B : F)(F : G) = B : G$. U. s. w.

7. Das Verhältniß der Polynomien

$$Ax + By + Cz : Ap + Bq + Cr$$

bleibt unverändert, wenn man in allen Gliedern die Größen A, B, C durch andere, F, G, H ersetzt, welche sich zu einander der Reihe nach verhalten wie A, B, C.

Beweis. Vermöge der Proportion $F : G : H = A : B : C$ ist $F : A = G : B = H : C$ (6). Multiplicirt man in den Polynomien die Größen A, B, C der Reihe nach mit $F : A$, $G : B$, $H : C$, so treten F, G, H an die Stelle von A, B, C, ohne daß das Verhältniß

---

*) Das Gleichheitszeichen wird in diesem Falle auch durch das von Oughtred 1631 eingeführte Zeichen : : vertreten.

der Polynomien sich verändert hat, weil ihre Glieder mit derselben Zahl multiplicirt worden sind.

Beispiele. Wenn $A : B : C = F : G : H$, so ist

$$A \pm B : C = F \pm G : H,$$

$$A \pm B \pm C : A = F \pm G \pm H : F, \text{ u. s. w.}$$

Ist $Ax + By + Cz = 0$, so ist auch $Fx + Gy + Hz = 0$.

8. Aus zwei Proportionen kann eine neue abgeleitet werden, indem man die Größen der einen der Reihe nach mit den Größen der andern multiplicirt. Aus

$$A : B : C = F : G : H$$
$$L : M : N = P : Q : R$$

folgt die Proportion

$$AL : BM : CN = FP : GQ : HR.$$

Beweis. $AL : BM = (A : B)(L : M)$ wie oben (5). Nun ist $A : B = F : G$, $L : M = P : F$, folglich $AL : BM = (F : G)(P : Q) = FP : GQ$. U. s. w.

Umgekehrt wird aus der Proportion

$$AL : BM : CN = p : q : r$$

abgeleitet

$$A : B : C = \frac{p}{L} : \frac{q}{M} : \frac{r}{N}$$

9. Man unterscheidet hauptsächlich drei Mittel*) zwischen zwei Größen: das arithmetische, das geometrische, das harmonische.

Das arithmetische Mittel zwischen zwei Größen ist die halbe Summe derselben. Wenn x das arithmetische Mittel zwischen A und B bedeutet, so ist

$$x = \tfrac{1}{2}(A + B), \quad A - x = x - B$$

Die Differenz von zwei Größen wird in den älteren Rechenbüchern „das arithmetische Verhältniß" derselben, und die Gleichung von zwei Differenzen „eine arithmetische Proportion" genannt. Die arithmetische Proportion $A - x = x - B$ heißt „stetig" (continua) mit Rücksicht darauf, daß die dritte Größe der zweiten gleich ist.

Das geometrische Mittel zwischen zwei Größen ist die Qua-

*) Nach dem Vorgange der ältern griechischen Mathematiker. Vergl. Nicomachus Arithm. II, 21. Pappus Coll. math. III, 5.



dratwurzel des Products derselben. Wenn y das geometrische Mittel zwischen A und B bedeutet, so ist (5)

$$y = \sqrt{AB}, \quad A : y = y : B$$

Die Gleichung von Verhältnissen $A : y = y : B$ wird „eine geometrische Proportion" genannt, und zwar „stetig" mit Rücksicht darauf, daß die dritte Größe der zweiten gleich ist. Daher sagt man auch „geometrische mittlere Proportionale" für geometrisches Mittel.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Größen ist die Größe, deren Reciproke das arithmetische Mittel zwischen den Reciproken der Größen ist, wobei unter der Reciproken der Größe das Verhältniß der Einheit zur Größe verstanden wird (5). Wenn z das harmonische Mittel zwischen A und B, x und y das arithmetische und das geometrische Mittel zwischen denselben Größen bedeuten, so ist

$$\frac{1}{z} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = \frac{A + B}{2AB}$$

$$A - z : z - B = A : B, \quad x : y = y : z$$

Ebenso versteht man unter dem arithmetischen Mittel zwischen n Größen den $n$ten Theil ihrer Summe, unter dem geometrischen Mittel zwischen denselben die $n$te Wurzel ihres Products, unter dem harmonischen Mittel zwischen denselben die Größe, deren Reciproke das arithmetische Mittel zwischen den Reciproken der Größen ist. „Harmonisch" heißt überhaupt eine Reihe von Gliedern, deren Reciproken eine arithmetische Progression bilden (Allg. Arithm. §. 28, 5), zufolge ihrer Anwendung bei der Theorie der Tonleitern. „Geometrisch" wurde eine Proportion genannt wegen ihrer Anwendung in Euclid's Elementen.

10. Das geometrische Mittel zwischen zwei Größen ist kleiner als das arithmetische Mittel; die Differenz beträgt weniger als das Quadrat der Differenz der Größen dividirt durch die 8fache kleinere Größe*).

$$\tfrac{1}{2}(A + B) - \sqrt{AB} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2$$

$$= \frac{(A - B)^2}{2(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2} < \frac{(A - B)^2}{8B}.$$

Ueberhaupt wird das Product der Theile einer gegebenen Summe am größten, wenn die Theile einander gleich sind. Denn das Product der ungleichen Theile läßt sich vermehren, indem man zwei ungleiche Theile durch gleiche, nämlich jeden durch ihr arithmetisches Mittel ersetzt.

Dagegen wird die Summe der Factoren eines gegebenen Products am kleinsten, wenn die Factoren einander gleich sind. Betrüge die Summe der gleichen Factoren ebensoviel oder mehr als die Summe der ungleichen Factoren, so wäre das erstere Product größer als das letztere, gegen die Voraussetzung.

*) Lenthéric Gerg. Ann. 21 p. 84.

§. 2. Functionen von Variablen.

1. Eine Größe heißt **abhängig** von andern Größen, wenn durch Veränderung der letztern eine Veränderung der erstern bewirkt wird. Die Größen, von denen eine Größe abhängt, werden die **Variablen** (**Argumente**), die abhängige Größe eine **Function***) der Variablen genannt. Z. B. der Preis einer Waare ist eine Function ihrer Masse; das Volum eines Körpers ist eine Function der Temperatur und Pressung; Potenz, Wurzel, Logarithmus einer Zahl sind Functionen der Zahl; eine Formel ist eine Function der Unbestimmten (Buchstaben), welche in ihr vorkommen. Wenn die Function von einer Variablen abhängt, so entspricht jedem gegebenen Werth der Variablen ein bestimmter Werth der Function, verschiedenen Werthen der Variablen entsprechen im Allgemeinen verschiedene Werthe der Function. Wenn die Function von mehrern Variablen abhängt, so entspricht jedem gegebenen Verein von Werthen aller Variablen ein bestimmter Werth der Function, einem Werth einer Variablen entspricht eine einfach oder mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit von Werthen der Function.

Irgend eine Function der Variablen x**) d. h. eine Formel, in der die Unbestimmte x vorkommt, wird dadurch bezeichnet, daß man die Variable x in Klammern schließt und vor die Parenthese zur Unterscheidung einen Buchstaben (Functionszeichen) setzt, der mit einem Factor (Coefficienten) nicht verwechselt werden darf. Z. B. $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ bedeuten verschiedene Formeln, die von x abhängen, die f-Function von x, die g-Function von x, u. s. f. Ebenso bezeichnet man eine Function der Variablen x und y durch $F(x, y)$, u. s. f. Unter $f(0)$, $f(1)$, . . versteht man dann die Werthe der $f(x)$, welche den Werthen 0, 1, . . der Variablen x entsprechen; unter $F(0, 1)$ versteht man den Werth der $F(x, y)$, welcher den Werthen 0, 1 der Variablen x, y entspricht u. s. f. Der einem gegebenen Weg der Variablen entsprechende Verlauf der Function kann dadurch verdeutlicht werden, daß man mit einer Reihe von Werthen der Variablen die Reihe der entsprechenden Werthe der Function tabellarisch zusammenstellt. Z. B.

---

*) Leibniz nannte Functionen allerlei zu einem Punct einer Curve gehörige Elemente, seine Abscisse, Ordinate, Tangente, Normale u. s. f. (Acta Erud. 1692 De linea etc. 1694 Nova calculi etc. Brief an Huygens 1694 Juni 29). Joh. Bernoulli brauchte 1718 den Ausdruck Function in dem jetzt gebräuchlichen Sinne (opp. II p. 241). Die Bezeichnung $f(x)$ scheint Clairaut zuerst angewandt zu haben (Mém. de l'acad. Paris. 1733 p. 269).

**) Zur Bezeichnung von Variablen und Functionen wurden von Vieta Vocale gebraucht; die heutige Bezeichnung rührt von Descartes her.

$$f(x) = \frac{3 + 4x}{7 - 2x^2}$$

x	$f(x)$
...	...
3	— 1,36
2	— 11
1	1,4
0	0,43
— 1	— 0,2
— 2	5
— 3	0,82
...	...

Um den Inhalt der Tabelle zur Anschauung zu bringen, construirt man auf einer beliebigen Geraden nach einem beliebigen Maßstab die (realen) Werthe der Variablen als Abscissen d. h. als Strecken der Geraden, die von dem (beliebig gewählten) Nullpunct derselben anfangen, und die entsprechenden Werthe der Function, wenn sie real sind, als Ordinaten d. h. als Strecken, die normal zu den Abscissen stehen und von den Endpuncten derselben anfangen. Die Linie, auf der die Endpuncte der Ordinaten liegen, wird durch den gegebenen Zusammenhang der Function mit der Variablen bestimmt.

Nicht-reale Werthe der Function können durch Ordinaten nicht dargestellt werden. Complexen Werthen der Variablen entsprechen im Allgemeinen complexe Werthe der Function. Zur Veranschaulichung braucht man dann zwei Flächen, die Puncte der einen für die Werthe der Variablen, entsprechende Puncte der andern für die entsprechenden Werthe der Function (Allg. Arithm. §. 16, 7).

2. Wenn die Werthe der Function zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die entsprechenden Werthe der Variablen (die $m$ten Potenzen dieser Werthe), so heißt die Function der Variablen (der $m$ten Potenz derselben) proportional. Wird die Variable $p$mal so groß, so wird die Function $p$mal (p^mmal) so groß. Wenn man durch a den Quotienten eines Werthes der Function durch den entsprechenden Werth der Variablen bezeichnet, so ist $f(x) = ax$ oder ax^m (§. 1, 6).

Beispiele. Die Masse eines Körpers ist seinem Gewichte proportional. Der Preis einer Waare ist dem Gewichte derselben proportional, wenn nicht die Größe des käuflichen Gegenstandes seinen Preis erhöht. Die Fläche des Kreises ist dem Quadrat des Radius proportional. Das Volum der Kugel ist dem Cubus des Radius proportional. Die Falltiefe ist dem Quadrat der Fallzeit proportional.

3. Wenn die Werthe der Function zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Reciproken der zugehörigen Werthe der Variablen

oder wie die Reciproken der $m$ten Potenzen dieser Werthe, so heißt die Function der Variablen oder ihrer $m$ten Potenz umgekehrt (indirect) proportional. Wird die Variable $p$mal so groß, so wird die Function den $p$ten Theil oder den p^{m}ten Theil so groß. Wenn man durch a das Product eines Werthes der Function und des entsprechenden Werthes der Variablen bezeichnet, so ist $f(x) = \frac{a}{x}$ oder $\frac{a}{x^{m}}$.

Beispiele. Bei bestimmter Arbeit ist die Arbeitszeit umgekehrt proportional der angewandten Kraft. Die Krümmung des Kreises ist dem Radius umgekehrt proportional. Die Helligkeit einer verschwindend kleinen beleuchteten Fläche ist dem Quadrat ihres Abstandes vom Lichtpuncte umgekehrt proportional. Das Gewicht eines Körpers ist dem Quadrat seines Abstandes vom Attractionscentrum umgekehrt proportional.

Wenn die Function der Variablen oder einer Potenz derselben proportional oder umgekehrt proportional ist, so kann man aus einem Werth der Variablen und dem entsprechenden Werth der Function den einem andern Werth der Variablen entsprechenden Werth der Function durch Regel de tri berechnen (Gem. Arithm. §. 6).

4. Wenn den Werthen a, x der Variablen die Werthe b, y der Function entsprechen, so sind $x - a$, $y - b$ entsprechende Differenzen (incrementa) der Variablen und der Function. Wenn jeder hinreichend kleinen Differenz $x - a$ der Variablen eine beliebig kleine Differenz $y - b$ der Function entspricht, so heißt die Function continuirlich (stetig) bei dem Werth a der Variablen, nach neuerem Gebrauch auch in dem Falle, daß die Function einen unendlich großen Werth annimmt und das Zeichen wechselt, während die Variable durch den Werth a hindurchgeht. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so hat die Function an der in Betracht gezogenen Stelle eine Discontinuität (Stetigkeits-Unterbrechung).

I. Wenn die Function continuirlich, real, endlich ist und von dem positiven oder negativen Werth b zu dem Werth b_1 übergeht, während die Variable den realen Weg von a bis a_1 zurücklegt, so haben bei hinreichend kleiner Differenz $a_1 - a$ die Werthe b und b_1 dasselbe Zeichen.

II. Wenn die Function continuirlich, real, endlich ist und von dem positiven Werth b zu dem negativen Werth b_1 übergeht, während die Variable den realen Weg von a bis a_1 zurücklegt, so existirt zwischen a und a_1 ein realer Werth a_0 der Variablen, welchem der Werth 0 der Function entspricht. Denn die Reihe der Werthe a, $a + \delta$, $a + \delta + \delta'$, . . der Variablen, welchen bei hinreichend kleinen δ, δ', . . positive Werthe der Function entsprechen (I), kann fortgesetzt werden, bis einem Werth a_0 der Variablen ein Werth der Function entspricht, der

nicht positiv ist. Dieser Werth der Function kann negativ nicht sein, sonst wäre auch ein hinreichend nahe voranstehender Werth der Function negativ, gegen die Voraussetzung. Also ist der fragliche Werth der Function null.

III. Wenn bei den vorigen Voraussetzungen $b_1 = b$ ist, so existirt zwischen a und a_1 ein realer Werth a' der Variablen, welchem ein extremer Werth der Function entspricht, ein Maximum oder ein Minimum d. h. größer oder kleiner als hinreichend nahe vor- und nachstehende Werthe der Function. Denn die Function kann von dem Werth b aus weder durchaus steigen noch durchaus fallen, um den Werth $b_1 = b$ zu erreichen.

5. I. Wenn die Differenz $b_1 - b$ der Function durch die entsprechende Differenz $a_1 - a$ der Variablen und deren Potenzen ausgedrückt werden kann (Aufgabe der Differentialrechnung), so ist die Function continuirlich bei dem Werth a der Variablen, und die Differenz der Function ist der entsprechenden Differenz der Variablen proportional mit einem bei hinreichend kleiner Differenz der Variablen beliebig kleinen Fehler. Denn aus den Voraussetzungen

$$b_1 - b = p(a_1 - a) + q(a_1 - a)^2 + \ldots = (p + \delta)(a_1 - a)$$
$$b_2 - b = p(a_2 - a) + q(a_2 - a)^2 + \ldots = (p + \delta')(a_2 - a)$$

folgt daß $b_1 - b$, $b_2 - b$ und

$$\frac{b_1 - b}{a_1 - a} - \frac{b_2 - b}{a_2 - a} = \delta - \delta'$$

beliebig klein sind bei hinreichend kleinen $a_1 - a$, $a_2 - a$.

Hierin ist die von den Nachfolgern Diophant's ausgebildete „regula falsorum" (el-chataayn, vergl. Drobisch de Widmanni compendio p. 29, falsarum positionum bei Leonardo lib. abaci fol. 141, regula aurea bei Cardano ars magna cap. 30) und die Regel für die Interpolation der Tabellen von bestimmten Functionen (Allg. Arithm. §. 20, 4) enthalten.

II. Im realen Gebiet hat bei hinreichend kleiner Differenz der Variablen der Werth $p + \delta$ mit p dasselbe Zeichen (4, I). Daher haben die entsprechenden Differenzen $b_1 - b$ und $a_1 - a$ dasselbe oder nicht dasselbe Zeichen, je nachdem p positiv ist oder negativ, d. h. die Function beginnt zu steigen oder zu fallen, während die Variable von a aus wächst, je nachdem p positiv ist oder negativ.

Wenn p null ist, so bleibt die Function unverändert, während die Variable von a aus sich zu ändern beginnt, d. h. dem Werth a der Variablen entspricht ein Werth der Function, der entweder ein Maximum ist (beim Uebergang der Function aus dem Steigen ins Fallen,

während die Variable den Werth a durchläuft), oder ein Minimum (beim Uebergang der Function aus dem Fallen ins Steigen), oder keines von beiden.

Der entscheidende Entwickelungscoefficient p heißt die Fluxion der Function (nach Newton) oder ihr Differentialquotient (nach Leibniz) oder ihre Derivirte (nach Lagrange). S. unten §. 10.

6. Eine Formel, in der die Unbestimmte x vorkommt, heißt eine rationale Function dieser Variablen, wenn sie durch eine gegebene endliche Anzahl von Additionen, Subtractionen, Multiplicationen, Divisionen aus der Variablen und aus Constanten (d. h. von der Variablen unabhängigen Zahlen oder Formeln) gebildet ist. Z. B.

$$a + bx, \quad (a + bx)^m, \quad \frac{a + bx}{c + dx^2} \;..$$

sind rationale Functionen von x, wenn a, b, c, d von x unabhängig, übrigens aber beliebig (rational, irrational, complex) sind, während der Exponent m eine ganze reale Zahl bedeutet.

Eine rationale Function heißt gebrochen oder ganz, je nachdem darin variable Divisoren vorkommen oder nicht. Z. B.

$$\frac{a + bx + cx^2}{d}$$

ist eine ganze Function von x, wenn a, b, c, d von x unabhängig sind. Dagegen ist $\frac{A}{B}$ eine gebrochene Function von x, wenn B eine rationale Function von x, A aber eine rationale Function von x oder auch eine von x unabhängige Zahl bedeutet.

Die ganze Function A heißt theilbar durch die ganze Function B, wenn der Quotient $\frac{A}{B}$ eine ganze Function ist. Z. B. $a^n - x^n$ ist theilbar durch $a - x$.

7. Eine ganze Function einer Variablen heißt vom $m$ten Grad, wenn darin die $m$te Potenz der Variablen, aber nicht eine Potenz derselben von größerem Exponenten vorkommt. Z. B.

$$a + bx,$$
$$a + bx + c^2x,$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3, \;..$$

sind ganze Functionen der Variablen x vom 1ten, 2ten, 3ten, .. Grad (linear, quadratisch, cubisch, ..), wenn die Coefficienten a, b, c, d von x unabhängig sind. Weil

$$(a + x)^2 - x^2 = a^2 + 2ax,$$

so ist $(a + x)^2 - x^2$ in Wahrheit eine Function von x nur ersten Grades.

Eine gebrochene Function läßt sich als Quotient von ganzen Functionen darstellen, und heißt dann echt oder unecht gebrochen, je nachdem der Grad des Divisor den Grad des Dividendus übersteigt oder nicht. Eine unecht gebrochene Function läßt sich durch Division in eine ganze Function, welche sich auch auf eine Constante reduciren kann, und in eine echt gebrochene Function auflösen (Allg. Arithm. §. 12).

Aus den gegebenen ganzen Functionen A, B findet man durch successive Divisionen die Kette (Allg. Arithm. §. 13, 3)

$$A = BP + C$$
$$B = CQ + D$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$L = MU + N$$

wobei die Grade der ganzen Functionen A, B, C, D, . . eine fallende Reihe bilden, und die Quotienten P, Q, . . ganze Functionen sind. Um ganze Coefficienten zu erreichen, versieht man die Dividenden mit hinreichenden positiven Multiplicatoren. Eine ganze Function, die in A und B aufgeht (6), ist ein Divisor von C, D, . . . Wenn die Function N ein Divisor von M ist, so ist sie der größte gemeinschaftliche Divisor von A und B, und ihre Coefficienten sind aus den Coefficienten von A und B rational zusammengesetzt. Wenn N von der Variablen unabhängig ist, so ist die gebrochene Function $A : B$ irreducibel.

8. Eine Formel, welche mehrere Unbestimmte enthält, heißt eine ganze oder eine gebrochene Function dieser Variablen, wenn ihr in Bezug auf jede einzelne Variable dieselben Prädicate zukommen. Insbesondere heißt eine ganze Function mehrerer Variablen vom $m$ten Grad, wenn in ihren Gliedern Producte von m (aber nicht mehr als m) variablen Factoren vorkommen. Die ganzen Functionen mehrerer Variablen vom ersten, zweiten, dritten Grade werden der Reihe nach linear, quadratisch, cubisch genannt. Z. B. $a + bx + cy$ ist eine lineare Function von x und y; $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ ist eine quadratische Function von x und y, u. s. f.

9. Wurzeln rationaler Functionen von x und rationale Functionen solcher Wurzeln heißen irrationale Functionen von x. Wenn y eine irrationale Function von x, und z eine irrationale Function von y ist, so ist z eine irrationale Function von x, u. s. w.

Ein Werth der Variablen u, bei welchem eine gegebene ganze Function $f(u)$ verschwindet, heißt eine Wurzel der Gleichung $f(u) = 0$. Vergl. §. 4. Wenn nun $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$, . . gegebene ganze Functionen von u sind, deren Coefficienten ganze Functionen von x sind, und wenn

$p, q, r, \ldots$ Wurzeln der Gleichungen $f(u) = 0$, $g(u) = 0$, $h(u) = 0, \ldots$ sind, so heißt jede rationale oder irrationale Function von $p, q, r, \ldots$ eine algebraische Function von x. Wenn y eine algebraische Function von x, und z eine algebraische Function von y ist, so ist z eine algebraische Function von x, u. s. w.

Algebraische Functionen werden bei besondern Werthen der Constanten irrational, gebrochen, ganz. Functionen, welche zu den algebraischen nicht gehören, heißen transscendent*). Z. B. a^y, $\cos y$, $\sin y$, $\log y$ sind transscendente Functionen von x, wenn y eine beliebige Function von x bedeutet. Ganze Functionen unendlichen Grades sind nur dann rational, wenn sie recurrent sind (Allg. Arithm. §. 12, 4).

Wenn den Werthen der Variablen im Allgemeinen (d. h. abgesehn von singulären Werthen der Variablen) mehrere Werthe der Function entsprechen, wenn daher einem gegebenen Weg der Variablen verschiedene Zweige der Function entsprechen, so heißt die Function mehrdeutig (biformis, triformis, .. nach Euler). Rationale Functionen von x, ferner a^x, $\cos x$ u. A. sind eindeutig, $a + \sqrt{x}$ ist 2deutig, $\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x}$ ist 4deutig, $\log x$ ist unendlichdeutig.

10. Wenn eine Function von mehrern Variablen so beschaffen ist, daß durch Multiplication der Werthe der einzelnen Variablen mit t der Werth der Function mit t^m multiplicirt wird,

$$f(tx, ty, \ldots) = t^m f(x, y, \ldots)$$

so heißt die Function homogen von m Dimensionen**). Z. B.

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad \sqrt{xy}, \quad \sqrt{x-y}, \quad \log x - \log y, \quad \frac{ax+by}{x^2-y^2}$$

sind homogene Functionen von 2, 1, ½, 0, — 1 Dimensionen.

Eine ganze homogene Function von 1, 2, 3, .. Dimensionen, deren Glieder je 1, 2, 3, .. variable Factoren enthalten, heißt eine Form 1ten, 2ten, 3ten, .. Grades (linear, quadratisch, cubisch, ..), und zwar binär, ternär, .. nach der Anzahl der Variablen***). Z. B. $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ist eine binäre quadratische Form der Variablen x, y. Jedes Glied einer Form $m$ten Grades von n Variablen enthält eine Combination von m gleichen oder ungleichen variablen Factoren; also hat die allgemeine Form $m$ten Grades von n Variablen

---

*) Diese Unterscheidungen sind im 17ten Jahrh. gemacht worden. Die Benennungen rühren hauptsächlich von Leibniz her. Acta Erud. 1682, 1684 p. 234 Vergl. Euler Introd. I cap. 1. Abel Crelle J. 1 p. 67.

**) Euler Introd. I cap. 5.

***) Gauß Disq. arithm. 153. 266.

$$\binom{n+m-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

Glieder (Allg. Arithm. §. 25, 6).

Die Glieder einer nicht homogenen ganzen Function $m$ten Grades können in homogene ganze Functionen von 0, 1, 2, . ., m Dimensionen vertheilt werden. Bezeichnet man diese Functionen durch $f_0, f_1, \ldots$ und eine neue Variable durch t, so erscheint die nicht homogene ganze Function $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_m$ als der Werth der homogenen ganzen Function $t^m f_0 + t^{m-1} f_1 + t^{m-2} f_2 + \ldots + t f_{m-1} + f_m$, welchen die letztere bei $t = 1$ annimmt. Eine nicht homogene ganze Function $m$ten Grades von n Variablen ist ein besonderer Werth einer homogenen ganzen Function von $n + 1$ Variablen; ihre allgemeine Formel hat demnach $\binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$ Glieder.

11. Eine Function mehrerer Variablen heißt symmetrisch oder alternirend*), je nachdem sie durch Vertauschung der Werthe von je zwei Variablen denselben oder den entgegengesetzt gleichen Werth erhält. Z. B.

$$x + y, \quad x^2 + y^2 + axy, \quad (x-y)^2, \quad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}$$
$$\cos(x - y), \; xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$$

sind symmetrische Functionen von x, y, z, weil sie sich nicht ändern, wenn man x mit y, oder x mit z, oder y mit z vertauscht;

$$x - y, \quad (x-y)^3, \quad \sin(x-y), \quad (x-y)(x-z)(y-z)$$

sind alternirende Functionen von x, y, z, weil sie den entgegengesetzten Werth erhalten, wenn x mit y, oder x mit z, oder y mit z vertauscht wird. Die Determinanten (Allg. Arithm. §. 26) sind alternirende Functionen ihrer Elemente. Das Quadrat einer alternirenden Function ist eine symmetrische Function.

Wenn eine symmetrische Function von x, y, z das Glied $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma$ hat, so enthält sie die Glieder $a_k x^\alpha y^\gamma z^\beta$, $a_k x^\beta y^\alpha z^\gamma$, . ., welche durch die gegenseitige Vertauschung von x, y, z oder von α, β, γ entstehen, mit demselben Coefficienten. Wenn eine ganze symmetrische Function der n Variablen $x, y, z, \ldots$ in Bezug auf jede einzelne Variable $m$ten Gra-

*) Die Benennung „symmetrische Function", wofür man sonst functio invariabilis sagte (Lagrange, auch Gauß disq. arithm. 347), ist von Lacroix eingeführt worden (Zusätze zu Clairaut élém. d'algèbre 5. éd. 1797, I p. 298. Compl. d'algèbre 1). Die alternirenden Functionen haben ihren Namen durch Cauchy 1812 erhalten (Journ. de l'éc. polyt. Cah. 17), der die symmetrischen Functionen in permanente und alternirende theilte.

des ist, so erhält man ihre Glieder aus der Formel $a_k x^\alpha y^\beta z^\gamma$ . . , indem man für $\alpha\beta\gamma$ . . je n gleiche oder ungleiche Zahlen der Reihe 0, 1, 2, . . , m in allen möglichen Anordnungen setzt; die Function hat also nicht mehr verschiedene Coefficienten, als es Combinationen $\alpha\beta\gamma$ . . giebt, nämlich $\binom{m+1+n-1}{n} = \binom{m+n}{n}$

§. 3. Die analytische Methode.

1. Das allgemeinste Verfahren, mathematische Aufgaben zu lösen, besteht darin, daß man zuerst die gestellten Fragen mit einer oder mehreren Unbestimmten vorläufig beantwortet, als ob die Aufgabe gelöst wäre. Diese Unbestimmten heißen die Unbekannten der Aufgabe. Dann werden die Daten der Aufgabe (die gegebenen Größen) durch die Unbekannten ausgedrückt, und die gefundenen Formeln (Functionen der Unbekannten) den Werthen, welche sie haben sollen, gleichgesetzt. Endlich berechnet man soweit es möglich ist, die Unbekannten aus den aufgestellten Gleichungen.

Dieses indirecte Verfahren, welches mit unwesentlichen Veränderungen auch zur Erfindung von geometrischen Constructionen gebraucht wird, ist aus dem Alterthum unter dem Namen Analysis*), analytische Methode bekannt.

Beispiel 1. Eine Gesellschaft von 90 Personen enthält 4 Männer mehr als Frauen, 10 Kinder mehr als Erwachsene. Aus wieviel Männern, Frauen, Kindern besteht die Gesellschaft?

Die Gesellschaft enthält x Frauen, folglich $x + 4$ Männer, $2x + 4$ Erwachsene, $2x + 14$ Kinder; zusammen $4x + 18$ Personen. Sie soll 90 Personen enthalten; also setzt man

$$4x + 18 = 90.$$

---

*) Ueber die analytische Methode, als deren Erfinder im Alterthum Plato genannt wird, handeln Euclides (Elem. 13 zu Anfang und Data, deutsch von Schwab 1780), Pappus Coll. math. 7, Vieta Isagoge in artem analyticam, Newton Arithm. univ. ed. Gravesande p. 64, u. A. Vergl. Klügel math. W. I p. 86. Berechnungen nach analytischer Methode hat im Alterthum hauptsächlich Diophantus gelehrt. Im Beginn der neuern Zeit unterschied man [illegible]s minor s. ars rei et zensus — die Unbekannte hieß res, cosa und ihr Quad t zensus, vergl. Allg. Arithm. §. 6 — und ars magna „quam vulgo cossam voca t sive regulas algebraicas“ Cardanus Ars magna cap. 1. Zur weitern Bearbe- tung dieses Gebietes, welches die Namen Coß, Algebra bezeichneten, ist die Buchstabe- rechnung ausgebildet worden. Seit Newton und Leibniz kam für die von ihn[illegible] ausgebildete Differential- und Integralrechnung der Name Analysis in Gebrau . Jetzt versteht man unter Analysis die Theorie der Functionen, unter algebraisch r Analysis oder Algebra die Theorie der algebraischen Functionen.

Aus dieser Bedingung folgt $4x = 72$, $x = 18$, d. h. die Gesellschaft besteht aus 18 Frauen, 22 Männern, 50 Kindern.

Beispiel 2. Man gewinnt p Procent an einer Waare, die man für m Thaler verkauft. Wieviel Procent gewinnt man, wenn man die Waare für n Thaler verkauft?

Bei x Procent Gewinn werden $100 + x$ Thaler für 100, 1 Thaler für den $(100 + x)$ten Theil soviel, n Thaler für $n$mal soviel eingenommen, d. h. die Waare wurde für $\frac{100n}{100 + x}$ Thaler eingekauft. Die Waare wird aber mit p Procent Gewinn für m Thaler verkauft, soll also für $\frac{100m}{100 + p}$ Thaler eingekauft worden sein. Also setzt man

$$\frac{100n}{100 + x} = \frac{100m}{100 + p}.$$

Aus dieser Bedingung folgt $\frac{100 + x}{n} = \frac{100 + p}{m}$,

$$100 + x = (100 + p)\frac{n}{m}, \quad x = (100 + p)\frac{n}{m} - 100$$

d. h. die Waare wird für n Thaler mit $(100 + p)\frac{n}{m} - 100$ Procent Gewinn, oder ohne Gewinn und Verlust, oder mit $100 - (100 + p)\frac{n}{m}$ Procent Verlust verkauft, je nachdem $(100 + p)\frac{n}{m} - 100$ positiv oder null oder negativ ist.

Beispiel 3. Aus dem Orte A geht ein Bote ab, der in 5 Stunden 7 Meilen zurücklegt. Aus dem 8 Meilen rückwärts gelegenen Orte B geht 8 Stunden später dem ersten ein Bote nach, der in 3 Stunden 5 Meilen zurücklegt. Wann und wo wird der erste Bote vom zweiten eingeholt?

Der erste Bote ist bis zur Einholung x Stunden in Bewegung und legt $\frac{7}{5}x$ Meilen zurück. Der zweite Bote ist $x - 8$ Stunden in Bewegung und legt $\frac{5}{3}(x - 8)$ Meilen zurück. Die Differenz dieser Wege ist $\frac{5}{3}(x - 8) - \frac{7}{5}x$ Meilen, und soll 8 Meilen betragen. Also setzt man

$$\tfrac{5}{3}(x - 8) - \tfrac{7}{5}x = 8.$$

Diese Bedingung lautet einfacher $\frac{4x}{15} - \frac{40}{3} = 8$, $\frac{4x}{15} = \frac{64}{3}$, $x = 80$, d. h. der erste Bote war 80 Stunden in Bewegung und 112 Meilen von A entfernt, als er von dem zweiten Boten eingeholt wurde.

Beispiel 4. Wenn a, b, c Thaler Capital nach k, l, m Monaten fällig sind, nach wie viel Monaten kann die Summe $a + b + c$ Thaler ausgezahlt werden?

Nach x Monaten. Gesetzt, 1 Thaler in 1 Monat trägt 1 Einheit Zinsen, so tragen $a + b + c$ Thaler in x Monaten $(a + b + c)x$ Einheiten Zinsen, dagegen a Thaler in k Monaten, b Thaler in l Monaten, c Thaler in m Monaten zusammen $ak + bl + cm$ Einheiten. Die ersten Zinsen sollen den letztern gleich sein, also setzt man

$$(a + b + c)x = ak + bl + cm.$$

Hieraus folgt $x = \frac{ak + bl + cm}{a + b + c}$.

Beispiel 5. Ein Wasserbehälter kann durch die Röhren A und B in 70 Minuten, durch A und C in 84 Minuten, durch B und C in 140 Minuten gefüllt werden. In wieviel Zeit kann er durch jede Röhre einzeln, in wieviel Zeit durch alle drei Röhren gefüllt werden?

Der Behälter kann durch A, B, C einzeln in x, y, z Minuten gefüllt werden, also liefern A, B, C in 1 Minute $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ Behälter, folglich

A und B in 70 Minuten $70\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ Behälter,

A und C in 84 Minuten $84\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)$ Behälter,

B und C in 140 Minuten $140\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ Behälter.

Diese Größen sollen je 1 Behälter betragen. Also setzt man

$$70\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad * \quad = \frac{1}{70}$$

$$84\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right) = 1 \qquad \frac{1}{x} \quad * \quad + \frac{1}{z} = \frac{1}{84}$$

$$140\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1 \qquad * \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{140}$$

woraus $\frac{2}{x} = \frac{1}{70} + \frac{1}{84} - \frac{1}{140} = \frac{2}{105}$, $x = 105$ gefunden wird. Ferner ist $\frac{1}{y} = \frac{1}{70} - \frac{1}{105} = \frac{1}{210}$, $y = 210$. Endlich $\frac{1}{z} = \frac{1}{140} - \frac{1}{210} = \frac{1}{420}$, $z = 420$, d. h. die Röhren A, B, C füllen den Behälter einzeln in 105, 210, 420 Minuten.

Die drei Röhren zusammen liefern $(\frac{1}{105} + \frac{1}{210} + \frac{1}{420})$ Behälter in 1 Minute, folglich 1 Behälter in

$$\frac{1}{\frac{1}{105} + \frac{1}{210} + \frac{1}{420}} = 60 \text{ Minuten.}$$

Beispiel 6. A und B haben zusammen c Thaler, der erste m Monate, der zweite n Monate lang, in einem Geschäft angelegt. An Capital und Zinsen erhielten sie p und q Thaler zurück. Wieviel hatte jeder beigetragen?

A hatte x Thaler m Monate lang angelegt, also mx Einheiten Zinsen verdient (Beispiel 4). Sein Gewinn betrug $p - x$ Thaler, folglich 1 Einheit Zinsen $\frac{p-x}{mx}$ Thaler.

B hatte $c - x$ Thaler n Monate lang angelegt, also $n(c - x)$ Einheiten Zinsen verdient. Sein Gewinn betrug $q - (c - x)$ Thaler, folglich 1 Einheit Zinsen $\frac{q - (c - x)}{n(c - x)}$ Thaler. Die Einheit Zinsen soll aber $\frac{p-x}{mx}$ Thaler betragen, also setzt man

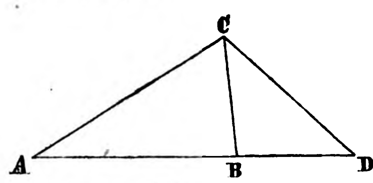
$$\frac{q - (c - x)}{n(c - x)} = \frac{p - x}{mx}$$

Die Entwickelung dieser Bedingung besteht in der Auflösung einer quadratischen Gleichung.

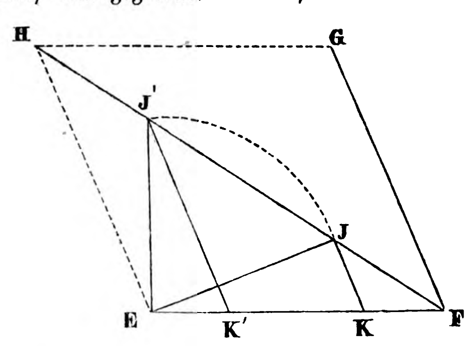
2. Constructionen nach analytischer Methode. Man construirt die gesuchte Figur willkürlich, und aus den Elementen der willkürlichen Figur diejenigen Elemente, welche von gegebener Größe oder Lage sein sollen. Hierdurch und durch geeignete Hülfslinien entstehen Hülfsfiguren, welche nach geometrischen Regeln durch die Daten bestimmt sind. Nun construirt man soweit es möglich ist aus den Daten die Hülfsfiguren und aus diesen wiederum die gesuchten Figuren. Dabei zeigt es sich, welchen Bedingungen die Daten unterworfen sein müssen, damit die Aufgabe lösbar sei, und wieviel verschiedene Figuren den Forderungen der Aufgabe genügen können (Determination).

Beispiel 1. Das Dreieck zu construiren, in welchem ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und die Summe der anliegenden Seiten von gegebener Größe sind.

Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC, der gegebene Winkel B und die gegebene Seite CA. Wenn man auf der Verlängerung von AB die Strecke BD $= BC$ macht, so ist $AD = AB + BC$ die gegebene Summe, und der Winkel CDA die Hälfte des gegebenen Winkels B, weil das Dreieck DCB gleichschenkelig ist. Da nun in dem Hülfsdreieck ADC der Winkel D, die gegenüberliegende Seite CA, und die anliegende Seite AD gegeben ist, so läßt sich das Hülfsdreieck und daraus das gesuchte Dreieck construiren.



Construction. Mache EF gleich der gegebenen Summe, GFE gleich dem gegebenen Winkel, und vollende den Rhombus $EFGH$, so daß der Winkel HFE $= \frac{1}{2} GFE$ wird. Beschreibe um E mit der gegebenen Seite den Kreis, der die Diagonale FH im Allgemeinen in J und J' trifft. Ziehe JK ($J'K'$) parallel mit FG, so ist EJK ($EJ'K'$) das gesuchte Dreieck.



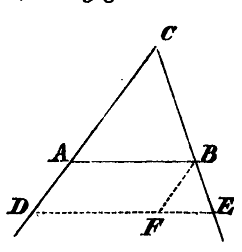
Beweis. Der Winkel JKE ist dem Winkel GFE, also auch dem gegebenen Winkel gleich, weil JK und FG parallel sind. Ferner ist $KJ = KF$, weil $KJF = GFJ = JFK$, folglich $EK + KJ = EF =$ der gegebenen Summe. Endlich ist $EJ =$ der gegebenen Seite. Ebenso beweist man, daß $EJ'K'$ den Forderungen der Aufgabe genügt.

Determination. Die Aufgabe ist lösbar, wenn die Diagonale FH von dem Kreise um E getroffen wird. Dieß ist der Fall, wenn die gegebene Seite nicht kleiner ist, als die Normale aus E zu FH, d. h. nicht kleiner als die Hälfte der andern Diagonale EG.

Die beiden Auflösungen der Aufgabe sind nicht wesentlich verschieden. Denn im Rhombus $EFGH$ ist $EFJ \cong EHJ'$, also der Winkel $KEJ = J'EH = EJ'K'$. Nun haben die Dreiecke EJK und $EJ'K$ eine Seite und zwei gleichliegende Winkel der Reihe nach gleich, also ist $EJK \cong J'EK'$.

Beispiel 2. Das Dreieck zu construiren, in welchem ein Winkel, die gegenüberliegende Seite und das Verhältniß der anliegenden Seiten gegeben sind.

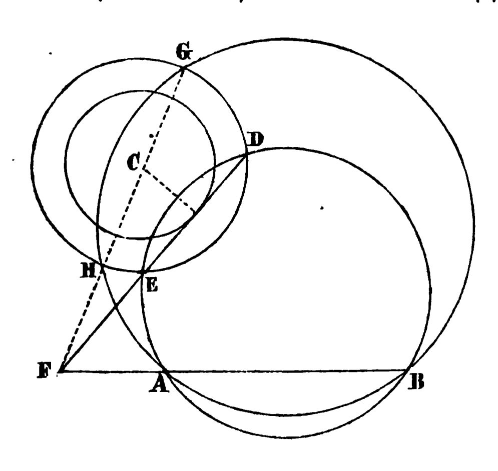
Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC, der gegebene Winkel C, die gegebene Seite AB, das gegebene Verhältniß $BC : CA$. Wenn man durch einen beliebigen Punct D der Geraden CA die mit AB parallele Gerade zieht, welche BC in E schneidet, so ist $EC : CD = BC : CA$ von gegebener Größe. Wenn man noch durch B die mit CA parallele Gerade zieht, welche DE in F schneidet, so ist $DF = AB$ von gegebener Größe. Man kann also aus den Daten die Hülfsfigur $CDEF$, und aus derselben das gesuchte Dreieck construiren.



Diese Aufgabe ist bei beliebigen Daten einfach auflösbar.

Beispiel 3. Gegeben zwei Puncte, ein Kreis und eine Sehne desselben; gesucht wird ein Kreis, der durch die gegebenen Puncte geht und von dem gegebenen Kreise einen Bogen abschneidet, dessen Sehne der gegebenen Sehne gleich ist.

Analysis. Der gesuchte Kreis sei $ABDE$, der durch die Puncte A und B geht und von dem Kreise (C) den Bogen DE abschneidet. Die Sehnen des Kreises (C), welche DE gleich sind, berühren einen concentrischen Kreis, dessen Radius der Abstand des Punctes C von DE ist. Die Sehnen AB und DE schneiden sich in F so, daß $FA . FB = FD . FE$ ist. Wenn nun eine durch F beliebig gezogene Gerade den gegebenen Kreis (C) in G und H schneidet, so ist $FD . FE = FG . FH$, folglich auch $FA . FB = FG . FH$, d. h. H liegt auf dem Kreise ABG. Also kann man durch den Hülfskreis ABG den Punct F, und durch eine bestimmte Tangente des kleinern Kreises um C den gesuchten Kreis ABD finden.



Construction. Durch die gegebenen Puncte A, B und einen willkürlichen Punct G des gegebenen Kreises (C) beschreibe den Kreis ABG, der den Kreis (C) noch einmal in H trifft. Die Geraden AB und GH schneiden sich in F. In dem Kreise (C) ziehe eine Sehne von der gegebenen Länge und den concentrischen Kreis, welcher diese Sehne berührt. Durch F ziehe die Tangenten des concentrischen Kreises, welche den Kreis (C) in D und E, D' und E' schneiden; so ist sowohl ABD, als auch ABD' der gesuchte Kreis.

Beweis. Die Sehne DE des Kreises (C) hat die geforderte Länge, weil sie den concentrischen Kreis berührt. Der Punct E liegt auf dem Kreise ABD, weil $FA \,.\, FB = FG \,.\, FH$ am Kreise $ABGH$, $FG \,.\, FH = FD \,.\, FE$ am Kreise (C), folglich $FA \,.\, FB = FD \,.\, FE$ ist. Ebenso für $D'E'$.

Determination. Diese Aufgabe hat unter der Bedingung, daß CF größer ist als der Radius des concentrischen Hülfskreises, zwei verschiedene Auflösungen, die nur dann sich nicht unterscheiden, wenn die gegebene Sehne ein Diameter ist, so daß der concentrische Kreis mit seinem Centrum zusammenfällt. Wenn insbesondere $AC = BC$, so werden die Sehnen AB, GH, DE, $D'E'$ parallel, ohne daß die Auflösungen wesentliche Veränderungen erleiden.

§. 4. Die Gleichungen.

(Heis §. 60—64.)

1. Identität, identische Gleichung*) heißt eine Gleichung (Allg. Arithm. §. 1), deren Seiten unbedingt gleich sind d. h. bei beliebigen Werthen der darin vorkommenden Unbestimmten. Es ist z. B.

$$a + b = b + a$$
$$(a - b) + (b - c) + (c - a) = 0$$
$$(a + b)c = ac + bc$$
$$(a - b)c + (b - c)a + (c - a)b = 0$$

welche Werthe auch die Unbestimmten a, b, c haben mögen. Jede Gleichung von Formeln, welche in der Arithmetik als richtig nachgewiesen wird, ist eine Identität.

Wenn bei gewissen Werthen der Unbestimmten die eine Seite der

*) Identitas von idem, lateinische Uebersetzung von ταυτότης, Einerleiheit. Die in einigen Lehrbüchern vorkommende Benennung „analytische Gleichung" für Identität erscheint nach dem über die „analytische Methode" Bemerkten nicht angemessen.

Gleichung einen andern Werth erhält, als die andere Seite, so ist die Gleichung nicht identisch. Die Gleichung $a + bx + cx^2 + dx^3 + .. = 0$ ist nur dann bei jedem beliebigen Werth von x richtig, also nur dann eine Identität, wenn $a = 0$, $b = 0$, $c = 0, \ldots$ Wäre a von Null verschieden, so wäre $a + bx + cx^2 + dx^3 + ..$ bei $x = 0$ von Null verschieden. Damit ferner

$$bx + cx^2 + dx^3 + .. = x(b + cx + dx^2 + ..)$$

bei jedem Werth von x verschwindet, muß $b + cx + dx^2 + ..$ bei jedem Werth von x verschwinden, mithin $b = 0$ sein, u. s. f.

2. Gleichung im engern Sinne (aequatio) heißt eine Gleichung, welche im Allgemeinen nicht identisch ist, und deren Seiten einander gleich gesetzt worden sind, um eine darin vorkommende Unbestimmte, die Unbekannte, zu bestimmen. Z. B. die Gleichung $4x + 3 = 23$ ist nicht identisch, weil $4x + 3$ im Allgemeinen von 23 verschieden ist; durch die Gleichung hört die Unbestimmtheit von x auf, denn die Gleichung wird nur dann richtig (identisch), wenn die Unbekannte x den Werth 5 erhält.

Ein Werth der Unbekannten, welcher der Gleichung genügt, d. h. die Gleichung identisch macht (verificirt), heißt eine Wurzel der Gleichung. Auch die Wurzeln von Zahlen sind Wurzeln von Gleichungen, z. B. $\sqrt[n]{a}$ ist eine Wurzel der Gleichung $x^n = a$ für die Unbekannte x. Eine Gleichung für die Unbekannte auflösen heißt die Wurzeln der Gleichung angeben.

Wenn $ax + b = 0$ sein soll, so ist $ax = -b$, $x = -b : a$, d. h. die Gleichung $ax + b = 0$ für die Unbekannte x hat die Wurzel $-b : a$. Ein Product kann nur dann verschwinden, wenn ein Factor desselben verschwindet. Vergl. Allg. Arithm. §. 11, 8. Der Gleichung

$$(ax + b)(cx - d) = 0$$

für die Unbekannte x wird daher sowohl durch die Gleichung $ax + b = 0$ als auch durch die Gleichung $cx - d = 0$ genügt, d. h. die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind $-b : a$ und $d : c$, die Unbekannte x ist durch diese Gleichung zweideutig bestimmt.

Eine Identität ist apodictisch (demonstrativ), d. h. eine Seite derselben ist der andern gleich bei beliebigen Werthen der Unbestimmten. Eine Gleichung ist hypothetisch (problematisch), d. h. eine Seite ist der andern gleich, wenn die Unbekannte einen bestimmten Werth hat.

3. Aus einer gegebenen Gleichung, sie mag identisch sein oder nicht, kann man congruente Gleichungen d. h. von derselben Bedeutung ableiten, indem man auf beiden Seiten dieselben arithmetischen Operationen ausführt.

I. Man kann ein Glied der einen Seite auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen setzen d. h. dieses Glied auf beiden Seiten addiren oder subtrahiren. Z. B. aus der Gleichung

$$ax + b = c - dx$$

folgt

$$ax + dx = c - b$$

Insbesondere kann man die Gleichung auf Null reduciren d. h. alle Glieder der einen Seite auf die andere Seite versetzen. Man kann die Zeichen aller Glieder verändern. Z. B. die Gleichungen

$$a - \frac{x}{b} = \frac{x}{c} - d$$

$$a - \frac{x}{b} - \frac{x}{c} + d = 0$$

$$\frac{x}{b} + \frac{x}{c} - a - d = 0$$

sind congruent und können einander vertreten. Wenn eine von ihnen identisch ist, so sind auch die andern identisch. Eine Wurzel der einen ist auch eine Wurzel der andern.

II. Man kann alle Glieder einer Gleichung mit derselben Zahl (ausgenommen 0 und ∞) multipliciren oder dividiren. Wenn gebrochene Glieder vorhanden sind, so findet man durch Multiplication mit dem kleinsten Generalnenner eine Gleichung, welche an die Stelle der gegebenen Gleichung gesetzt werden kann. Congruente Gleichungen sind z. B

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{und} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

vorausgesetzt daß a nicht 0 ist;

$$\frac{x}{b - x} + \frac{x}{c} + a = 0 \quad \text{und} \quad cx + (b - x)x + ac(b - x) = 0$$

denn der Multiplicator $c(b - x)$, durch welchen die gegebene Gleichung in die abgeleitete übergeht, ist null bei $x = b$, welcher Werth von x der gegebenen Gleichung nicht genügt;

$$\frac{1}{x} - \frac{1 - x}{x(1 + x)} + 3 = 0 \quad \text{und} \quad 5 + 3x = 0$$

denn der Multiplicator $1 + x$ ist null bei dem der gegebenen Gleichung nicht genügenden Werth -1 der Unbekannten. Nicht congruent sind

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \quad \text{und} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

weil $x = 0$ der einen Gleichung genügt, der andern nicht genügt.

III. Man kann jede Seite der Gleichung mit derselben Zahl poten-

ziren, eine Zahl mit jeder Seite potenziren, dieselbe Wurzel und denselben Logarithmus jeder Seite nehmen. Congruent sind z. B.

$$\sqrt[n]{a + bx} = c \quad \text{und} \quad a + bx = c^n$$
$$\text{log. nat.}\ (a + bx) = c \quad \text{und} \quad a + bx = e^c$$

unter der Voraussetzung, daß die Wurzel und der Logarithmus nicht mehr Deutungen erhalten als c,

$$(a + bx)^m = c \quad \text{und} \quad a + bx = \sqrt[m]{c}$$
$$a^{b+cx} = d \quad \text{und} \quad b + cx = \log d : \log a$$

Dagegen haben die Gleichungen

$$(a + bx)^m = (c + dx)^m, \quad e^{a+bx} = e^{c+dx}$$

einen weitern Umfang als die Gleichung $a + bx = c + dx$, u. s. w.

Die unter (I) gezeigten Umgestaltungen einer Gleichung wurden nach der Ausdrucksweise der arabischen Mathematiker*) Algebra et Almocabala (restitutio et oppositio) genannt. Daher kommt der Gebrauch des Wortes Algebra im weitern Sinne für allgemeine Arithmetik (Buchstabenrechnung), im engern und gewöhnlichen Sinne für die Lehre von den nicht identischen Gleichungen, genauer von den algebraischen Gleichungen und Functionen (6).

4. Um die Art einer gegebenen Gleichung zu bestimmen, muß man die Gleichung ordnen in Bezug auf eine Unbestimmte (die Unbekannte). Wenn in der Gleichung nur rationale Functionen der Unbestimmten vorkommen (§. 2, 6), so hat man (3).

die Gleichung auf Null zu reduciren,
die Divisoren zu entfernen, in denen die Unbestimmte vorkommt,
die Parenthesen aufzulösen, in denen die Unbestimmte vorkommt,
die Glieder zusammenzufassen, welche die Unbestimmte in 0ter, 1ter 2ter, . . Potenz enthalten.

Wenn auch die andere Seite der geordneten Gleichung den Werth Null hat, so ist die gegebene Gleichung eine Identität (1).

Die gegebene Gleichung ist nicht identisch und heißt eine Gleichung $m$ten Grades für die Unbekannte, wenn in der geordneten Gleichung die Unbekannte mit dem Exponenten m, aber nicht mit einem größern als m vorkommt, wenn also eine Seite der geordneten Gleichung Null, die andre Seite eine ganze Function der Unbekannten vom $m$ten Grade ist (§. 2, 7). Die Gleichungen 2ten, 3ten, 4ten Grades in Bezug auf eine Unbekannte heißen quadratisch, cubisch, biquadratisch. Die

*) Vergl. Nesselmann Geschichte der Algebra p. 40 ff. Noch heute heißt bei den Spaniern der Chirurgus algebrista.

geordnete Gleichung heißt **rein** (pura, binomisch), wenn sie nicht mehr als ein unbekanntes Glied (eine Potenz der Unbekannten) enthält; außerdem wird sie **unrein**, **gemischt** (affecta, trinomisch, polynomisch) genannt.

Die Gleichung $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ist für die Unbekannte x^2 vom 2ten Grade. Die Gleichung $a + b\sqrt[3]{x} + c\sqrt[3]{x^2} + dx = 0$ ist für die Unbekannte $\sqrt[3]{x}$ vom dritten Grade.

Eine reine Gleichung wird aufgelöst, indem man das unbekannte Glied auf eine Seite absondert und den Coefficienten der Unbekannten durch Division entfernt. Wenn z. B. $ax^m + b = 0$, so ist

$$ax^m = -b, \quad x^m = -\frac{b}{a}, \quad x = \sqrt[m]{-\frac{b}{a}}$$

Die Auflösung der Gleichung $a(x-b)(x+c) = 0$ für x besteht aus der Auflösung der Gleichungen $x - b = 0$, $x + c = 0$ (2).

Die Gleichung $a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ für x erhält eine verschwindende oder eine unendliche Wurzel, je nachdem a_0 oder a_m null wird. Denn der gegebenen Gleichung wird durch $x = 0$ unter der Bedingung $a_0 = 0$ genügt. Dagegen hat man

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots = x^m\left(a_m + \frac{a_{m-1}}{x} + \ldots\right)$$

Das eingeschlossene Polynomium hat bei hinreichend großem x von a_m eine beliebig kleine Differenz und ist beliebig klein unter der Bedingung $a_m = 0$.

5. Wenn in der gegebenen Gleichung unbekannte Wurzeln (irrationale, algebraische Functionen der Unbekannten §. 2, 9) vorkommen, so kann die Gleichung ebenfalls nach Potenzen der Unbekannten mit ganzen Exponenten geordnet werden. Diese Umgestaltung gelingt in den einfachsten Fällen durch Potenzirung, nachdem eine Wurzel auf eine Seite der Gleichung abgesondert worden ist. Z. B.

$$\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} = a \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{x^3} = a - \sqrt{x}$$

giebt quadrirt, weil die 4te Wurzel 4deutig ist,

$$\pm x\sqrt{x} = a^2 - 2a\sqrt{x} + x \quad \text{oder} \quad (\pm x + 2a)\sqrt{x} = a^2 + x$$

Durch wiederholtes Quadriren entsteht die Gleichung

$$x^3 + (1 \pm 4a)x^2 + 2a^2x - a^4 = 0$$

Bei einer algebraischen Formel, welche verschwinden soll, ist ihre Mehrdeutigkeit zu beachten. Es läßt sich beweisen, daß das Product der verschiedenen Werthe, welche die algebraische Formel hat, rational

ist, die Norm der algebraischen Formel (Allg. Arithm. §. 16, 7. Vergl. unten §. 10). Z. B. die Formel $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ hat 8 Werthe, welche aber paarweise entgegengesetzt gleich sind. Das Product der 4 verschiedenen Werthe

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(-\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}-\sqrt{q}+\sqrt{r})(\sqrt{p}+\sqrt{q}-\sqrt{r})$$

beträgt $2pq + 2pr + 2qr - p^2 - q^2 - r^2$. Wenn nun p, q, r rationale Functionen einer Unbekannten sind, so ist die Gleichung

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 0$$

von derselben Bedeutung, als die Gleichung

$$2pq + 2pr + 2qr - p^2 - q^2 - r^2 = 0.$$

6. Ueberhaupt läßt sich eine nicht identische Gleichung als die Forderung betrachten, daß eine bestimmte Function der Unbekannten verschwinden soll*). Eine nicht identische Gleichung heißt algebraisch oder transscendent, je nachdem die Function der Unbekannten, welche der Null gleichgesetzt wird, algebraisch ist oder transscendent (§. 2, 9). Jede algebraische Gleichung aber kann als die Forderung betrachtet werden, daß eine bestimmte ganze Function der Unbekannten verschwinden soll (5).

§. 5. Systeme von Gleichungen mit mehreren Unbekannten, insbesondere von linearen Gleichungen.

(Heis §. 65—68.)

1. Durch die Forderung, daß mehrere Unbestimmte einer (nicht identischen) Gleichung genügen sollen, ist die unendliche Mannigfaltigkeit der Werthe von einer unter ihnen beschränkt, von den übrigen unbeschränkt. Jede der Unbestimmten kann als eine Unbekannte betrachtet werden, welche durch die Gleichung bestimmt ist (§. 4, 2). Eine Gleichung mit mehreren Unbekannten heißt unbestimmt (indeterminata), weil sie eine der Unbekannten verschieden bestimmt je nach den Werthen, welche den übrigen Unbekannten beliebig ertheilt werden. Zufolge der unbestimmten Gleichung hat eine Unbekannte eine bestimmte Abhängigkeit von den übrigen Unbekannten, sie ist eine bestimmte Function derselben, und zwar implicite (unentwickelt), so lange sie nicht ein-

*) Geläufiger wurde diese Ansicht durch Descartes Géom. III. Früher pflegte man das bekannte Glied (homogeneum comparationis bei Vieta) abzusondern.



deutig durch die übrigen ausgedrückt ist (explicite), d. h. so lange die Gleichung nicht für die Unbekannte aufgelöst ist.

Eine unbestimmte Gleichung heißt **algebraisch**, wenn sie in Bezug auf jede Unbekannte algebraisch ist; **transscendent**, wenn sie in Bezug auf eine Unbekannte transscendent ist. Jede algebraische unbestimmte Gleichung kann als die Forderung dargestellt werden, daß eine bestimmte ganze Function der Unbekannten verschwinden soll (§. 4, 6); der **Grad** derselben wird nach der höchsten Anzahl von unbekannten Factoren bestimmt, die in einem Gliede der Gleichung vorkommen (§. 4, 4 und §. 2, 8). Die unbestimmten Gleichungen vom ersten, zweiten, dritten, vierten Grade heißen **linear**, **quadratisch**, **cubisch**, **biquadratisch**.

2. Durch ein System (Verein) von mehreren unbestimmten Gleichungen werden im Allgemeinen ebensoviel in ihnen enthaltene Unbekannte bestimmt.

Beweis. Wenn 2 Gleichungen mit zwei Unbekannten x, y gegeben sind, so ist y zufolge der ersten Gleichung eine bestimmte Function von x, zufolge der zweiten Gleichung eine andere bestimmte Function von x (1). Der Verein von beiden Gleichungen fordert, daß die erste Function von x der andern gleich ist. Durch die Gleichung (Gleichsetzung) beider Functionen von x wird die Unbestimmtheit von x aufgehoben, wenn nicht diese Gleichung eine Identität ist; also ist auch die Unbekannte y bestimmt.

Wenn 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z gegeben sind, so ist z zufolge jeder Gleichung eine bestimmte Function von x und y. Der Verein der gegebenen Gleichungen fordert, daß eine dieser Functionen den anderen gleich ist. Durch 2 Gleichungen dieser 3 Functionen von x und y werden aber im Allgemeinen die zwei Unbekannten x, y bestimmt, also ist auch die Unbekannte z bestimmt.

Gesetzt, k Unbekannte werden durch ein System von k Gleichungen bestimmt, so schließt man aus denselben Gründen, daß $(k + 1)$ Unbekannte durch ein System von $(k + 1)$ Gleichungen bestimmt werden. Demnach werden 4 Unbekannte durch 4 Gleichungen, 5 Unbekannte durch 5 Gleichungen, u. s. f. bestimmt.

3. Wenn einem System von Gleichungen für die Unbekannten x, y, .. und zwar allen seinen Gleichungen die Werthe $x = \alpha$, $y = \beta$, .. genügen, so heißt das System der Werthe α, β, .. eine **Auflösung** (solutio) des gegebenen Systems. Dabei kann es sich ereignen, daß jede Auflösung von mehreren Gleichungen des Systems zugleich den

übrigen Gleichungen des Systems genügt; in diesem Falle sind die letztern Gleichungen des Systems überflüssig, von den erstern nicht unabhängig.

Ein System von Gleichungen, die von einander unabhängig sind, ist **unmöglich**, wenn es weniger Unbekannte enthält als Gleichungen; **bestimmt**, wenn es ebensoviel Unbekannte enthält als Gleichungen (2); **unbestimmt** (1fach, 2fach, . .), wenn es 1, 2, . . Unbekannte mehr enthält als Gleichungen.

4. Aus zwei oder mehr Gleichungen eines gegebenen Systems kann man durch Addition oder Subtraction des Gleichen u. s. f. neue Gleichungen ableiten, welche von jenen Gleichungen nicht unabhängig sind. Eine abgeleitete Gleichung vermag eine der Gleichungen, aus denen sie abgeleitet wurde, unbedingt zu vertreten, wenn sie mit ihr denselben Grad hat.

Wenn A, B, C gegebene Functionen der Unbekannten sind und λ, μ, ν willkürliche Multiplicatoren, die aber weder verschwinden noch unendlich werden, so folgen aus dem System $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen $\lambda A + \mu B = 0$, $\lambda A + \mu B + \nu C = 0$, u. s. w. Die abgeleitete Gleichung $\lambda A + \mu B = 0$ kann eine der Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ im System vertreten, mit der sie denselben Grad hat. Das System $A = 0$, $\lambda A + \mu B = 0$ ist mit dem System $A = 0$, $B = 0$ **congruent** (die Auflösungen des einen sind von den Auflösungen des andern nicht verschieden), wenn λ endlich und μ nicht 0 ist; eine Auflösung des Systems $A = 0$, $\mu = 0$ würde dem System $A = 0$, $B = 0$ im Allgemeinen nicht genügen.

Aus dem System $x + y = a$, $x - y = b$ folgt durch Addition $2x = a + b$, durch Subtraction $2y = a - b$; das System der abgeleiteten Gleichungen ist mit dem gegebenen System von gleicher Bedeutung und liefert die Auflösung desselben $x = \frac{1}{2}(a + b)$, $y = \frac{1}{2}(a - b)$.

Aus dem System $x : y = a$, $xy = b$, folgt durch Multiplication $x^2 = ab$, zum Ersatz für die zweite Gleichung. Aus dem System $x^2 - y^2 = a$, $x + y = b$ findet man durch Division die Gleichung $x - y = a : b$, welche nur zum Theil die erste Gleichung vertritt; es genügen dem System auch entgegengesetzt gleiche unendliche Werthe von x und y.

5. Unter den aus einem System von Gleichungen abzuleitenden Gleichungen kommen besonders solche in Betracht, in denen gewisse Unbekannte nicht mehr vorkommen. Aus zwei Gleichungen des Systems eine Unbekannte **eliminiren** heißt (nach **Euler**) eine Gleichung ableiten, welche diese Unbekannte nicht enthält.

Wenn beide Gleichungen in Bezug auf die zu eliminirende Unbekannte vom ersten Grade sind, so multiplicirt man die erste Gleichung mit dem Coefficienten der Unbekannten in der zweiten Gleichung, die zweite Gleichung mit dem negativen Coefficienten der Unbekannten in der ersten Gleichung, und findet aus den multiplicirten Gleichungen durch Addition die gesuchte Gleichung. Haben die erwähnten Coefficienten einen gemeinschaftlichen Divisor, so genügen als Multiplicatoren die Quotienten der Coefficienten durch den gemeinschaftlichen Divisor. Um aus den Gleichungen

$$6x + 5y - 7 = 0$$
$$- 9x + 2y + 3 = 0$$

y zu eliminiren, multiplicirt man die erste mit 2, die zweite mit -5, und findet durch Addition $57x - 29 = 0$; um x zu eliminiren, multiplicirt man die erste mit 3, die zweite mit 2, und findet durch Addition $19y - 15 = 0$. Um x aus den Gleichungen

$$ax + B = 0$$
$$cx + D = 0$$

zu eliminiren, multiplicirt man die erste mit c, die zweite mit $-a$ und findet durch Addition $Bc - aD = 0$, die Bedingung, unter der die zweite Gleichung mit der ersten congruent ist.

6. Um ein System von n Gleichungen aufzulösen, ist es im Allgemeinen erforderlich, ein System von $n - 1$ Gleichungen abzuleiten, welches eine der Unbekannten nicht enthält, indem man aus $n - 1$ verschiedenen Paaren von Gleichungen diese Unbekannte eliminirt. Aus dem System von $n - 1$ Gleichungen wird ebenso ein System von $n - 2$ Gleichungen abgeleitet, welches zwei Unbekannte nicht enthält, u. s. w. Indem man von dem gegebenen System und von den abgeleiteten Systemen je eine Gleichung behält, kann man ein congruentes resolvirendes System aufstellen, dessen erste Gleichung nur die erste Unbekannte enthält, dessen zweite Gleichung außer der ersten nur die zweite Unbekannte enthält, dessen dritte Gleichung außer den beiden ersten nur die dritte Unbekannte enthält, u. s. w. Durch die Gleichungen des resolvirenden Systems werden der Reihe nach alle Unbekannte bestimmt und alle Auflösungen des gegebenen Systems gefunden.

Wenn man bei den gegebenen Operationen zu einer Identität gelangt, so enthält das System eine oder mehrere überflüssige Gleichungen. Wenn man aber zu einer Gleichung gelangt, in der die Coefficienten der Unbekannten null sind, so genügen dem System nicht endliche, sondern unendliche Werthe dieser Unbekannten. Z. B. Aus dem System

$$x + y = a, \quad mx + my = b$$

findet man $0x + 0y = ma - b$. Unter der Bedingung $ma - b = 0$ ist diese Gleichung identisch, und die zweite Gleichung des Systems überflüssig. Wenn $ma - b$ nicht null ist, so setze man $x = u : t$, $y = v : t$. Aus dem System

$$u + v = at, \quad mu + mv = bt$$

folgt $0 = (ma - b)t$, d. h. $t = 0$, $u + v = 0$. Also genügen dem gegebenen System unendliche Werthe von x und y, welche entgegengesetzt gleich sind.

Das System

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 18 \\ 2x + 3y + 5z &= 24 \\ x + 5y + 2z &= 43 \end{aligned}$$

ist bei endlichen x, y, z unmöglich, weil durch Addition der beiden ersten Gleichungen $x + 5y + 2z = 42$ gefunden wird, im Widerspruch gegen die dritte Gleichung. Diesem System genügen unendliche x, y, z, die sich verhalten wie $-19 : 1 : 7$.

Das System

$$\begin{array}{ccccc} * & cy & - bz & = & f \\ -cx & * & + az & = & g \\ bx & - ay & * & = & h \end{array}$$

ist für endliche x, y, z nur dann möglich, wenn $af + bg + ch = 0$. Unter dieser Bedingung ist eine der Gleichungen aus den beiden andern ableitbar, mithin das System unbestimmt.

7. Um ein **lineares System** d. h. ein System linearer Gleichungen aufzulösen, wenn die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten eine gemeine Zahl ist, bildet man durch Elimination von Unbekannten abgeleitete Systeme von weniger Unbekannten, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt. Den gefundenen Werth dieser Unbekannten substituirt man in einer Gleichung des zunächst voranstehenden Systems, um eine andere Unbekannte zu berechnen; die gefundenen Werthe werden zur Berechnung einer dritten Unbekannten gebraucht, u. s. f.

Beispiel 1.

$$\begin{array}{llll|l|l} 5x - 3y + 2z & = & 4 & & + & \\ x + 4y - z & = & 3\tfrac{1}{6} & & 2 & + \\ 2x - 3y + z & = & \tfrac{1}{2} & & & + \\ \hline 7x + 5y & = & 10\tfrac{1}{3} & & - & \\ 3x + y & = & 3\tfrac{2}{3} & & 5 & \\ \hline 8x & = & 8, & x = 1 & & \\ y & = & \tfrac{2}{3} & & & \\ z & = & \tfrac{1}{2}. & & & \end{array}$$

Man findet 2 abgeleitete Gleichungen für x und y, indem man z aus den beiden ersten und aus den beiden letzten Gleichungen des Systems eliminirt. Dazu genügt es, die zweite Gleichung mit 2 multiplicirt zur ersten zu addiren, und die dritte Gleichung zur zweiten zu addiren. Aus dem abgeleiteten System findet man eine neue abgeleitete Gleichung für x, indem man y aus den beiden Gleichungen dieses Systems eliminirt. Nachdem man x gefunden hat, findet man $y = 3\frac{2}{3} - 3x$, und endlich $z = \frac{1}{2} - 2x + 3y$.

Beispiel 2.

$$\begin{array}{cccccccc|c}
5u & - & 4x & & . & & . & = 4 & -3 \\
3u & + & 4x & + & 5y & & . & = 27 & 5 \\
. & & 2x & + & 3y & + & 4z & = 14 & + \\
. & & . & & 3y & - & 4z & = 7 & + \\
\hline
. & & 32x & + & 25y & & . & = 123 & - \\
. & & 2x & + & 6y & & . & = 21 & 16 \\
\hline
. & & . & & 71y & & . & = 213, & y = 3 \\
. & & 2x & & . & & . & = 3, & x = \frac{3}{2} \\
. & & . & & . & & 4z & = 2, & z = \frac{1}{2} \\
5u & & . & & . & & . & = 10, & u = 2.
\end{array}$$

In besonderen Fällen kann man das gegebene System vereinfachen, indem man gewisse Functionen der Unbekannten z. B. die Summe, die Reciproken der Unbekannten u. dgl. als neue Unbekannte einführt (substituirt). Nach Berechnung der neuen Unbekannten aus dem vereinfachten System findet man aus dem System der gemachten Substitutionen die Unbekannten des gegebenen Systems.

8. **Ein allgemeines System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten** enthält n^2 Coefficienten der Unbekannten und n gegebene Glieder. Wenn i, k Zahlen aus der Reihe 1, 2, . ., n bedeuten, wenn man die Unbekannten durch x_1, x_2, . ., x_n, wenn man in der $i$ten Gleichung den Coefficienten von x_k durch a_{ik} und das gegebene Glied durch b_i bezeichnet, wenn also das System

$$\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \,.\,.\, + a_{1n}\, x_n = b_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \,.\,.\, + a_{2n}\, x_n = b_2 \\
\quad .\;.\;.\qquad .\;.\;.\qquad .\;.\;. \\
a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \,.\,.\, + a_{nn}\, x_n = b_n
\end{array}$$

gegeben ist, so bilde man die Determinanten $n$ten und $(n-1)$ten Grades der Coefficienten (Allg. Arithm. §. 26)

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & . & . & \alpha_{1n} \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & . & . & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

Wenn nun R von 0 verschieden ist, so multiplicirt man die gegebenen

Gleichungen der Reihe nach mit den Subdeterminanten, welche den Elementen der $k$ten Colonne adjungirt sind, und findet durch Addition*)

$$Rx_k = b_1\alpha_{1k} + b_2\alpha_{2k} + \ldots + b_n\alpha_{nk}$$

Denn in der Summe hat x_i den Coefficienten

$$a_{1i}\alpha_{1k} + a_{2i}\alpha_{2k} + \ldots + a_{ni}\alpha_{nk}$$

welcher R oder 0 ist, je nachdem i und k gleich sind oder ungleich.

9. I. Dem homogenen linearen System, welchem ein nicht homogenes lineares System untergeordnet ist (§. 2, 10),

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}$$

wird im Allgemeinen nur durch die Werthe $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$ genügt. Denn die Determinante Rx_1

$$\begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

verschwindet, weil alle Elemente der ersten Colonne null sind. Wenn nun R von 0 verschieden ist, so ist $x_1 = 0$, u. s. w.

II. Wenn R null ist und unter den Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades eine nicht null ist, so genügen dem gegebenen System die Werthe

$$x_1 = \lambda\alpha_{k1} \quad x_2 = \lambda\alpha_{k2} \ldots x_n = \lambda\alpha_{kn}$$

bei unbestimmtem λ, und das gegebene System ist 1fach unbestimmt. Denn

$$\frac{1}{\lambda}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) = a_{i1}\alpha_{k1} + \ldots + a_{in}\alpha_{kn}$$

ist null auch bei $i = k$ nach der Voraussetzung.

III. Wenn die Subdeterminanten $(n-1)$ten Grades null sind und unter den Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades eine nicht null ist, z. B. $\Sigma \pm a_{33} \ldots a_{nn}$; wenn die Determinante $(n-1)$ten Grades

*) Diese Auflösung ist von **Leibniz** und zum zweitenmale von **Cramer** (1750) erfunden worden. Vergl. die Schrift des Verf. über Determinanten §. 8.

$$\begin{vmatrix} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 & a_{i3} & . & . & a_{in} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & a_{33} & . & . & a_{3n} \\ . \quad . \quad . & . & . & . & . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & a_{n3} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt durch

$$(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2)\, b_2 + a_{i3}b_3 + \,.\,.\, + a_{in}b_n$$

ausgedrückt wird, so genügen dem gegebenen System die Werthe

$$x_3 = \frac{b_3}{b_2} \;..\; x_n = \frac{b_n}{b_2}$$

bei unbestimmten x_1, x_2, und das gegebene System ist 2fach unbestimmt. Denn

$$b_2(a_{i1}x_1 + \,.\,.\, + a_{in}x_n) = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2)\, b_2 + a_{i3}b_3 + \,.\,.\, + a_{in}b_n$$

ist die Entwickelung einer Determinante $(n-1)$ten Grades, die null ist nicht nur bei $i = 3, 4, \ldots, n$, sondern nach der Voraussetzung auch bei $i = 1, 2$. U. s. w.

§. 6. Die quadratischen Gleichungen.

(Heis §§. 69—76.)

1. Eine quadratische Gleichung mit einer Unbekannten (§. 4, 4) hat im Allgemeinen 3 Glieder, welche die Unbekannte in zweiter Potenz, in erster Potenz und gar nicht enthalten. Daher ist die allgemeine Formel einer quadratischen Gleichung für die Unbekannte x

$$ax^2 + bx + c = 0$$

wenn die Coefficienten a, b, c beliebige von x unabhängige Zahlen bedeuten.

In dem besondern Falle $c = 0$ verschwindet $ax^2 + bx$ oder $x(ax + b)$ sowohl, wenn der eine Factor x verschwindet, als auch wenn der andere Factor $ax + b$ verschwindet, d. h. wenn $x = 0$ und wenn $x = -b : a$. Also hat die Gleichung $ax^2 + bx = 0$ die beiden verschiedenen Wurzeln 0 und $-b : a$.

In dem besondern Falle $b = 0$ ist die quadratische Gleichung rein (§. 4, 4). Durch Umstellung, Division und Radicirung erhält man

$$ax^2 = -c, \quad x^2 = -\frac{c}{a}, \quad x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Die Quadratwurzel kann sowohl positiv als auch negativ genommen werden (Allg. Arithm. §. 16, 5). Also hat die reine quadratische Glei-

chung $ax^2 + c = 0$ zwei entgegengesetzt gleiche (reale oder imaginäre) Wurzeln.

2. Die Formel $ax^2 + bx + c$, eine quadratische Function von x (§. 2, 7), kann unter Anwendung eines geeigneten Multiplicator durch 2 Glieder dargestellt werden, deren erstes ein von x abhängiges positives Quadrat, deren zweites von x unabhängig ist*). Z. B.

$3x^2 + 4x - 7$ wird nach Multiplication mit 3 durch $(3x + 2)^2 - 25$ ausgedrückt, indem man 2^2 addirt und subtrahirt.

$-3x^2 + 5x - 7$ wird nach Multiplication mit -3.4 durch $(6x + 5)^2 + 59$ ausgedrückt, indem man 5^2 addirt und subtrahirt.

$ax^2 + bx + c$ wird nach Multiplication mit $4a$ ausgedrückt durch $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac$, indem man b^2 addirt und subtrahirt.

Daher ist die allgemeine quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ congruent mit $(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$ oder

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac, \quad 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Der zweite Ausdruck, welcher bei kleinen a gebraucht wird, entsteht aus dem ersten, wenn man den Zähler und den Nenner desselben mit $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ multiplicirt, in Betracht daß

$$(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(b + \sqrt{b^2 - 4ac}) = -b^2 + (b^2 - 4ac)$$
$$= -4ac.$$

Die Quadratwurzel ist zweideutig, und zwar real oder imaginär, je nachdem der Radicandus positiv oder negativ ist (Allg. Arithm. (§. 16, 6). Also hat die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ zwei Wurzeln, welche bei realen a, b, c

real verschieden sind, wenn $b^2 - 4ac$ positiv,
real gleich " " " " null,
complex conjugirt " " " " negativ.

Wenn a null ist, so hat eine Wurzel den Werth $-c : b$, die andre ist unendlich groß (§. 4, 4).

Die Formel $b^2 - 4ac$, deren Vergleichung mit 0 hierbei entscheidend ist, heißt bei den Neuern die **Discriminante** der betrachteten quadratischen Gleichung. Wenn a und c entgegengesetzt sind, so ist $4ac$ negativ, $-4ac$ positiv, also auch $b^2 - 4ac$ positiv, folglich hat die Gleichung reale verschiedene Wurzeln.

---

*) Dieser wesentlichste Schritt zur Auflösung der quadratischen Gleichungen ist in Euclid's Elem. II, 6 angezeigt.

Bemerkenswerth ist die Summe und das Product der Wurzeln der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{c}{a}$$

Man kann also die Summe, das Product und die Zeichen der Wurzeln einer quadratischen Gleichung ohne Auflösung der Gleichung angeben.

3. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung können auch goniometrisch ausgedrückt werden. Wenn a, b, c positive Zahlen bedeuten, so hat die Gleichung

$ax^2 + bx - c = 0$ die realen Wurzeln $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$

$ax^2 + bx + c = 0$ die realen Wurzeln $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

oder die complexen Wurzeln $\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$

Für alle Fälle berechne man $\sqrt{c : a} = r$, so daß $ac = a^2r^2$.

In dem ersten Falle setze man $b = 2ar \cot\omega$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r(-\cot\omega \pm \sqrt{\cot^2\omega + 1}) = r\,\frac{-\cos\omega \pm 1}{\sin\omega}$$

d. i $r \tan\frac{1}{2}\omega$ und $-r\cot\frac{1}{2}\omega$, während $\tan\omega = 2ar : b$.

In dem zweiten Falle setze man $b = \frac{2ar}{\sin\omega}$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r\left(-\frac{1}{\sin\omega} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2\omega} - 1}\right) = r\,\frac{-1 \pm \cos\omega}{\sin\omega}$$

d. i. $-r\tan\frac{1}{2}\omega$ und $-r\cot\frac{1}{2}\omega$, während $\sin\omega = 2ar : b$.

In dem dritten Falle setze man $b = 2ar\cos\omega$. Dadurch findet man die Wurzeln

$$r(-\cos\omega \pm i\sin\omega), \quad \text{während } \cos\omega = b : 2ar.$$

Die Wurzeln der Gleichung $ax^2 - bx \pm c = 0$ sind den Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx \pm c = 0$ entgegengesetzt gleich.

Einfacher kann man nach Gauß die Logarithmen der realen Wurzeln einer quadratischen Gleichung aus den Logarithmen der Coefficienten der Gleichung durch

logarithmische Hülfstabellen berechnen (Vega's Sammlung mathematischer Tafeln von Hülße 1840).

4. Die quadratische Function $ax^2 + bx + c$ ist 2mal null bei den Werthen α, β von x, welche die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind, und wird bei beliebigen x durch das Product $a(x-\alpha)(x-\beta)$ ausgedrückt, so daß $\alpha + \beta = -b : a$, $\alpha\beta = c : a$.

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, folglich

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + c - (a\alpha^2 + b\alpha + c)$$
$$= a(x^2 - \alpha^2) + b(x - \alpha) = (x - \alpha)(ax + a\alpha + b)$$

d. h. theilbar durch $x - \alpha$. Ebenso erkennt man, daß $ax^2 + bx + c$ durch $x - \beta$ theilbar ist. Bezeichnet man durch q den Quotienten

$$ax^2 + bx + c : (x - \alpha)(x - \beta),$$

so fordert die Identität (§. 4, 1)

$$ax^2 + bx + c = q(x - \alpha)(x - \beta) = qx^2 - (\alpha + \beta)qx + \alpha\beta q$$

daß $q = a$, $(\alpha + \beta)q = -b$, $\alpha\beta q = c$.

Wenn die quadratische Function bei mehr als 2 Werthen von x null ist, so ist sie identisch null d. h. bei allen Werthen von x, und a, b, c sind null. Denn unter der Voraussetzung, daß x von α, β verschieden ist, ist das Product $a(x - \alpha)(x - \beta)$ nur dann null, wenn $a = 0$. Ebenso schließt man weiter, daß $bx + c$ bei mehr als einem Werth von x nur dann null ist, wenn $b = 0$ und $c = 0$.

Wenn x real ist und nicht zwischen α und β liegt, so hat $a(x - \alpha)(x - \beta)$ mit a einerlei Zeichen. U. s. w.

5. Die quadratische Function $ax^2 + bx + c$ hat

bei $x = \dfrac{-b}{2a}$ den extremen Werth $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$

der bei positivem a ein Minimum, bei negativem a ein Maximum ist (§. 2, 4). Denn in den Ausdrücken der Function (2)

$$\frac{(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{b^2 - 4ac - (2ax + b)^2}{-4a}$$

ist das Quadrat $(2ax + b)^2$, welches bei realen x nicht negativ ist, null bei $x = -b : 2a$. Dabei erreicht der erste Ausdruck mit positivem a seinen kleinsten, der zweite mit negativem a seinen größten Werth.

Anmerkung. Aus denselben Gründen erreicht die gebrochene Function

$$x + \frac{a}{x} = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{a}$$

bei positivem x ihr Minimum $2\sqrt{a}$, wenn $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}} = 0$ d. h. $x = \sqrt{a}$. Vergl. §. 1, 10.

Um zu finden, bei welchen Werthen x der Variablen die gebrochene Function

$$y = \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 3}$$

ein Maximum oder ein Minimum erreicht, untersuche man, bei welchen Werthen y die Gleichung für x

$$yx^2 - (3y + 1)x - 3y + 4 = 0$$

reale Wurzeln hat. Zur Realität dieser Wurzeln genügt es, daß

$$(3y + 1)^2 - 4y(4 - 3y) = 21y^2 - 10y + 1 = 21(y - \tfrac{1}{3})(y - \tfrac{1}{7})$$

nicht negativ ist (2, 4). Also bleibt x real, während y von ∞ bis $\frac{1}{3}$ fällt und von $-\infty$ bis $\frac{1}{7}$ steigt. An den Grenzen $y = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{7}$ hat x den Werth $\frac{3y + 1}{2y}$ d. i. 3 und 5. Folglich erreicht die gebrochene Function bei $x = 3$ ein Minimum $y = \frac{1}{3}$ und bei $x = 5$ ein Maximum $y = \frac{1}{7}$.

6. Eine quadratische Form von n Variablen (§. 2, 10) hat im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n + 1)$ Glieder, welche die Quadrate der Variablen und die Producte von je zwei Variablen enthalten; immer ist sie durch nicht mehr als n variable Quadrate mit gewissen positiven oder negativen Coefficienten darstellbar (2).

Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u ein Quadrat vorkommt, z. B. $u = ax^2 + 2px + v$, wobei p eine homogene lineare Function der übrigen Variablen und v eine quadratische Form der übrigen Variablen ist, so hat man

$$au = (ax + p)^2 - (p^2 - av)$$

d. h. u ist durch ein Quadrat nebst einer quadratischen Form von $n - 1$ Variablen darstellbar. Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u kein Quadrat vorkommt z. B.

$$u = 2bxy - 2px + 2qy + v$$

wobei p, q homogene lineare Functionen der übrigen Variablen sind und v eine quadratische Form der übrigen Variablen, so hat man

$$2bu = 4(bx + q)(by + p) - (4pq - 2bv)$$
$$= (bx + q + by + p)^2 - (bx + q - by - p)^2 - (4pq - 2bv)$$

d. h. u ist durch 2 Quadrate nebst einer quadratischen Form von $n - 2$ Variablen darstellbar. Nun ist eine binäre quadratische Form durch

nicht mehr als 2 Quadrate darstellbar, folglich eine ternäre durch nicht mehr als 3, u. s. w.

7. Die binäre quadratische Form $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ ist durch 1 Quadrat darstellbar, wenn ihre Determinante $b^2 - ac$ verschwindet. Denn man hat

$$au = (ax + by)^2 - (b^2 - ac)y^2$$

Die ternäre quadratische Form

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy$$

ist durch weniger als 3 Quadrate darstellbar, wenn ihre Determinante

$$-abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh$$

verschwindet. Wenn insbesondere a, b, c, fgh null sind, also z. B. $h = 0$, so ist

$$2u = 4z(gx + fy) = (gx + fy + z)^2 - (gx + fy - z)^2$$

d. h. u durch 2 Quadrate darstellbar. Wenn aber unter den Coefficienten a, b, c z. B. a nicht null ist, so hat man

$$au = (ax + hy + gz)^2 + py^2 + 2qyz + rz^2$$

wobei $p = ab - h^2$, $q = af - gh$, $r = ac - g^2$. In den besondern Fällen $p = 0$, $q = 0$, oder $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 2 Quadrate darstellbar; in dem Falle $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 1 Quadrat darstellbar. Wenn aber unter den Größen p, r z. B. p nicht null ist und $q^2 - pr = 0$ ist, so bleibt

$$apu = p(ax + hy + gz)^2 + (py + qz)^2$$

d. h. u ist durch 2 Quadrate darstellbar, wenn

$$q^2 - pr = a(-abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh)$$

verschwindet. Das Binomium $pm^2 + n^2$ kann dann durch das Product der linearen Factoren $(n + m\sqrt{-p})(n - m\sqrt{-p}$ ersetzt werden.

8. Ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, von dem die eine Gleichung quadratisch, die andere linear ist, hat 2 Auflösungen (§. 5, 3), die aus den Wurzeln einer quadratischen Hülfsgleichung berechnet werden. Im Allgemeinen hat man aus der linearen Gleichung eine Unbekannte durch die andere auszudrücken und den gefundenen Werth in der quadratischen Gleichung zu substituiren. Durch Auflösung der abgeleiteten quadratischen Gleichung findet man 2 Werthe der übrig gebliebenen Unbekannten, und durch Substitution dieser Werthe in der linearen Gleichung die zugehörigen Werthe der andern Unbekannten; mithin erhält man 2 Systeme von Werthen der Unbekannten, welche dem gegebenen System von Gleichungen genügen.

bei positivem x ihr Minimum $2\sqrt{a}$, wenn $\sqrt{x} - \sqrt{\frac{a}{x}} = 0$ d. h. $x = \sqrt{a}$. Vergl. §. 1, 10.

Um zu finden, bei welchen Werthen x der Variablen die gebrochene Function

$$y = \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 3}$$

ein Maximum oder ein Minimum erreicht, untersuche man, bei welchen Werthen y die Gleichung für x

$$yx^2 - (3y + 1)x - 3y + 4 = 0$$

reale Wurzeln hat. Zur Realität dieser Wurzeln genügt es, daß

$$(3y + 1)^2 - 4y(4 - 3y) = 21y^2 - 10y + 1 = 21(y - \tfrac{1}{3})(y - \tfrac{1}{7})$$

nicht negativ ist (2, 4). Also bleibt x real, während y von ∞ bis $\frac{1}{3}$ fällt und von $-\infty$ bis $\frac{1}{7}$ steigt. An den Grenzen $y = \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{7}$ hat x den Werth $\frac{3y + 1}{2y}$ d. i. 3 und 5. Folglich erreicht die gebrochene Function bei $x = 3$ ein Minimum $y = \frac{1}{3}$ und bei $x = 5$ ein Maximum $y = \frac{1}{7}$.

6. Eine quadratische Form von n Variablen (§. 2, 10) hat im Allgemeinen $\frac{1}{2}n(n + 1)$ Glieder, welche die Quadrate der Variablen und die Producte von je zwei Variablen enthalten; immer ist sie durch nicht mehr als n variable Quadrate mit gewissen positiven oder negativen Coefficienten darstellbar (2).

Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u ein Quadrat vorkommt, z. B. $u = ax^2 + 2px + v$, wobei p eine homogene lineare Function der übrigen Variablen und v eine quadratische Form der übrigen Variablen ist, so hat man

$$au = (ax + p)^2 - (p^2 - av)$$

d. h. u ist durch ein Quadrat nebst einer quadratischen Form von $n - 1$ Variablen darstellbar. Wenn unter den Gliedern der gegebenen Form u kein Quadrat vorkommt z. B.

$$u = 2bxy - 2px + 2qy + v$$

wobei p, q homogene lineare Functionen der übrigen Variablen sind und v eine quadratische Form der übrigen Variablen, so hat man

$$2bu = 4(bx + q)(by + p) - (4pq - 2bv)$$
$$= (bx + q + by + p)^2 - (bx + q - by - p)^2 - (4pq - 2bv)$$

d. h. u ist durch 2 Quadrate nebst einer quadratischen Form von $n - 2$ Variablen darstellbar. Nun ist eine binäre quadratische Form durch

nicht mehr als 2 Quadrate darstellbar, folglich eine ternäre durch nicht mehr als 3, u. s. w.

7. Die binäre quadratische Form $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ ist durch 1 Quadrat darstellbar, wenn ihre Determinante $b^2 - ac$ verschwindet. Denn man hat

$$au = (ax + by)^2 - (b^2 - ac)y^2$$

Die ternäre quadratische Form

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gxz + 2hxy$$

ist durch weniger als 3 Quadrate darstellbar, wenn ihre Determinante

$$- abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh$$

verschwindet. Wenn insbesondere a, b, c, fgh null sind, also z. B. $h = 0$, so ist

$$2u = 4z(gx + fy) = (gx + fy + z)^2 - (gx + fy - z)^2$$

d. h. u durch 2 Quadrate darstellbar. Wenn aber unter den Coefficienten a, b, c z. B. a nicht null ist, so hat man

$$au = (ax + hy + gz)^2 + py^2 + 2qyz + rz^2$$

wobei $p = ab - h^2$, $q = af - gh$, $r = ac - g^2$. In den besondern Fällen $p = 0$, $q = 0$, oder $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 2 Quadrate darstellbar; in dem Falle $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ ist u durch 1 Quadrat darstellbar. Wenn aber unter den Größen p, r z. B. p nicht null ist und $q^2 - pr = 0$ ist, so bleibt

$$apu = p(ax + hy + gz)^2 + (py + qz)^2$$

d. h. u ist durch 2 Quadrate darstellbar, wenn

$$q^2 - pr = a(- abc + af^2 + bg^2 + ch^2 - 2fgh)$$

verschwindet. Das Binomium $pm^2 + n^2$ kann dann durch das Product der linearen Factoren $(n + m\sqrt{-p})(n - m\sqrt{-p}$ ersetzt werden.

8. Ein System von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten, von dem die eine Gleichung quadratisch, die andere linear ist, hat 2 Auflösungen (§. 5, 3), die aus den Wurzeln einer quadratischen Hülfsgleichung berechnet werden. Im Allgemeinen hat man aus der linearen Gleichung eine Unbekannte durch die andere auszudrücken und den gefundenen Werth in der quadratischen Gleichung zu substituiren. Durch Auflösung der abgeleiteten quadratischen Gleichung findet man 2 Werthe der übrig gebliebenen Unbekannten, und durch Substitution dieser Werthe in der linearen Gleichung die zugehörigen Werthe der andern Unbekannten; mithin erhält man 2 Systeme von Werthen der Unbekannten, welche dem gegebenen System von Gleichungen genügen.

In besonderen Fällen führen besondere Methoden leichter zu demselben Ziele.

Beispiel 1. $x + y = a, \quad xy = b.$

Indem man die erste Gleichung quadrirt und die 4fache zweite subtrahirt, findet man statt der zweiten

$$(x - y)^2 = a^2 - 4b, \quad x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$$

Durch Addition und Subtraction der Gleichungen

$$x + y = a$$
$$x - y = \sqrt{a^2 - 4b}$$

findet man, wenn c die positive Quadratwurzel bedeutet,

$$\begin{array}{c||c|c} x & \frac{1}{2}(a + c) & \frac{1}{2}(a - c) \\ y & \frac{1}{2}(a - c) & \frac{1}{2}(a + c) \end{array}$$

Beispiel 2. $ax + by = f, \quad cx^2 + dy^2 = g.$

$$y = \frac{f - ax}{b}, \quad cx^2 + \frac{d}{b^2}(f - ax)^2 = g.$$

Indem man diese Gleichung ordnet und auflöst, erhält man

$$x = \frac{adf + b\sqrt{(a^2d + b^2c)g - cdf^2}}{a^2d + b^2c} \quad \text{und} \quad y = \frac{f - ax}{b}$$

Bezeichnet man die positive Quadratwurzel durch R, so findet man die Auflösungen

$$\begin{array}{c||c|c} x & \dfrac{adf + bR}{a^2d + b^2c} & \dfrac{adf - bR}{a^2d + b^2c} \\ y & \dfrac{bcf - aR}{a^2d + b^2c} & \dfrac{bcf + aR}{a^2d + b^2c} \end{array}$$

9. Wenn F und G ganze Functionen $m$ten und $n$ten Grades von x und y (§. 2, 8) und nicht beide durch dieselbe ganze Function von x und y theilbar sind, so werden die Auflösungen des Systems $F = 0$, $G = 0$ im Allgemeinen wie folgt gefunden. Man ordnet F und G nach fallenden Potenzen einer Unbekannten z. B. x, und bildet mit Hülfe geeigneter Multiplicatoren λ, μ (§. 5, 4) abgeleitete Gleichungen $\lambda F + \mu G = 0$, die für x niedern Grades sind, bis man endlich eine Gleichung $H = 0$ findet, welche x nicht enthält und die andere Unbekannte y bestimmt. Eine der abgeleiteten Gleichungen, die für x niedrigsten Grades ist, dient dann zur Bestimmung der Werthe von x, welche zu den einzelnen Werthen von y gehören*) Unter der Bedingung $H = 0$

*) Euler Introd. II c. 19. Mém. de Berlin 1764 p. 96 und Bézout Mém. de Paris 1764 p. 298. Vergl. des Verf. Determinanten §. 11 und dessen Abhandlung: Ueber die Auflösungen eines Systems von Gleichungen. Dresden 1868.

haben die Gleichungen $F = 0$ und $G = 0$ für x mindestens eine gemeinschaftliche Wurzel; also sind unter der Bedingung $H = 0$ die Functionen F und G von x durch eine ganze Function von x theilbar, deren Coefficienten durch die Coefficienten von F und G rational ausgedrückt werden können.

Wenn z. B. $F = ax^2 + bx + c$, $G = a'x^2 + b'x + c'$, und die Coefficienten $a, a', ..$ von y abhängen, so bilde man aus dem System $F = 0$, $G = 0$ das System $aG - a'F = 0$, $c'F - cG = 0$ d. i.

$$(ab' - a'b)x + ac' - a'c = 0, \quad (ac' - a'c)x + bc' - b'c = 0$$

in Betracht daß $x = 0$ dem gegebenen System nicht genügt. Aus dem abgeleiteten System wird wiederum die Gleichung

$$(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0$$

abgeleitet zur Berechnung der Werthe von y. Die zugehörigen Werthe von x bestimmt dann die Gleichung $(ab' - a'b)x + ac' - a'c = 0$, welche für x nur ersten Grades ist.

Das obige allgemeine System $F = 0$, $G = 0$ hat, wie unten §. 10 bewiesen wird, mn Auflösungen d. h. es genügen dem System mn Werthe von y mit ebensoviel dazugehörigen Werthen von x. Wenn die zuletzt abgeleitete Gleichung für y bei besondern Werthen der Coefficienten auf einen niedern als den mnten Grad herabsinkt, so hat sie eine entsprechende Menge unendlicher Wurzeln (§. 4, 4). Man verhütet den Verlust der letztern, wenn man statt der gegebenen Functionen $F(x, y)$ und $G(x, y)$ die homogenen Functionen (§. 2, 10)

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) \text{ und } t^n G\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right)$$

in Betracht zieht; bei $t = 0$ erhält man die unendlichen, bei $t = 1$ die endlichen Auflösungen des Systems*).

Wenn P, Q, R, S gegebene Functionen der Unbekannten sind, so wird dem System $PQ = 0$, $RS = 0$ durch die Systeme

$$\begin{array}{c|c|c|c} P = 0 & P = 0 & Q = 0 & Q = 0 \\ R = 0 & S = 0 & R = 0 & S = 0 \end{array}$$

vollständig genügt, weil ein Product nur dann verschwindet, wenn ein Factor den Werth 0 hat. Wenn $R = P$, so wird dem gegebenen System auch durch die Gleichung $P = 0$ genügt.

Wenn P und Q homogene Functionen von denselben Dimensionen

---

*) Eine allgemeine Methode zur genauern Unterscheidung der unendlichen Auflösungen eines binären Systemes ist in der erwähnten Abhandlung des Verf. enthalten.

sind, so bildet man aus dem System $P = a$, $Q = b$ die Gleichung $bP - aQ = 0$ zur Berechnung des Verhältnisses der Unbekannten.

In manchen Fällen wird das gegebene System vereinfacht, wenn man die Summe, die Differenz, das Product oder andere Functionen der Unbekannten als neue Unbekannte substituirt.

Beispiel 1. Das System

$$x^2(y^2 - 1) - 2xy(y^2 - 1) + y^4 - 2y^2 + 1 = 0$$
$$x^2(y^2 - 3y + 2) - y^4 - 3y^3 + 7y^2 + 15y - 18 = 0$$

ist gleichbedeutend mit dem System

$$(y - 1)(y + 1)(x - y + 1)(x - y - 1) = 0$$
$$(y - 1)(y - 2)(x + y + 3)(x - y - 3) = 0,$$

und untergeordnet dem homogenen System

$$(y - t)(y + t)(x - y + t)(x - y - t) = 0$$
$$(y - t)(y - 2t)(x + y + 3t)(x - y - 3t) = 0,$$

also auflösbar durch die Gleichung $y - t = 0$ und durch die Systeme

$$\begin{array}{c|c|c} y + t = 0 & y + t = 0 & y + t = 0 \\ y - 2t = 0 & x + y + 3t = 0 & x - y - 3t = 0 \end{array}$$

u. s. w. Man findet außer $y = 1$ die Auflösungen

t	x	y	
0	x	0	
	x	x	2fach
1	-2	-1	2fach
	2	-1	
	1	2	
	3	2	
	-1	-2	

In der ersten Auflösung gehört zu einem unendlich großen Werth von x ein endlicher Werth von y.

Beispiel 2. Das System

$$x^3 - y^3 - 3y(x - y) = 0$$
$$3x^2 - 2xy - y^2 = 0$$

ist gleichbedeutend mit dem System

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 3y) = 0$$
$$(x - y)(3x + y) = 0,$$

welchem zuerst durch die Gleichung $x - y = 0$ genügt wird, dan aber auch durch das System $x^2 + xy + y^2 - 3y = 0$, $3x + y =$ (Durch die Substitution $y = -3x$ findet man $7x^2 + 9x = 0$, als für x die Werthe $0, -\frac{9}{7}$, und für y die zugehörigen Werthe $0, \frac{27}{7}$.

Die Auflösung 0, 0 ist aber bereits in der Gleichung $x - y = 0$ enthalten.

Beispiel 3. Aus dem System

$$x^2 + y^2 = xy, \quad x + y = xy$$

leitet man die Gleichung $(x + y)^2 = 3xy$, oder $(x + y)^2 - 3(x + y) = 0$ ab, welche die erste Gleichung vertritt. Daher hat man die Systeme

$$\begin{array}{c|c} x + y = 0 & x + y = 3 \\ xy = 0 & xy = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c||c|c|c} 2x & 0 & 3 + i\sqrt{3} & 3 - i\sqrt{3} \\ 2y & 0 & 3 - i\sqrt{3} & 3 + i\sqrt{3} \end{array}$$

Die Auflösung 0, 0 ist eine 2fache.

Beispiel 4. Aus dem System

$$x^3y - xy^3 + 3xy + x + y = 0, \quad x^2 - y^2 + 3 = 0$$

erhält man durch Substitution von $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ für x, y das allgemeinere homogene System

$$x^3y - xy^3 + 3t^2xy + t^3(x + y) = 0, \quad x^2 - y^2 + 3t^2 = 0.$$

Wenn man von der ersten Gleichung die mit xy multiplicirte zweite Gleichung subtrahirt, so findet man anstatt der ersten Gleichung

$$t^3(x + y) = 0$$

und daher die Systeme

$$\begin{array}{c|c} t^3 = 0 & x + y = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 & x^2 - y^2 + 3t^2 = 0 \end{array}$$

Beiden Systemen genügt nur $t = 0$, d. h. es genügen dem gegebenen System nur unendliche Werthe von x und y, die entweder gleich (3fach) oder entgegengesetzt gleich (5fach) sind.

Beispiel 5. Das System

$$\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x - y} = \frac{3}{4}, \quad 2x^3 + 6xy^2 = \frac{9}{64}(x^2 - y^2)^3$$

ist dem homogenen System

$$8tx = 3x^2 - 3y^2, \quad 2t^3x(x^2 + 3y^2) = \tfrac{9}{64}(x^2 - y^2)^3$$

untergeordnet. Durch Substitution von $3y^2 = 3x^2 - 8tx$ in der zweiten Gleichung findet man $t^3x^2(x - 3t) = 0$, und daher die Auflösungen

t	x	y	
0	x	$\pm x$	3fach
1	0	0	4fach
	3	± 1	

Beispiel 6. Das System

$$x + y = a, \quad x^5 + y^5 = b$$

ist dem homogenen System

$$x + y = at, \quad x^5 + y^5 = bt^5$$

untergeordnet. Setzt man $xy = v$, so erhält man als zweite Gleichung (Allg. Arithm. §. 9, 5)

$$(a^5 - b)t^5 - 5a^3t^3v + 5atv^2 = 0$$

Daher wird dem gegebenen System auch durch $t = 0$, $x + y = 0$ genügt, d. h. durch entgegengesetzt gleiche unendliche Werthe der Unbekannten. Nimmt man nun wieder $t = 1$, so ist zufolge des Systems $x + y = a$, $xy = v$

$$2x = a + \sqrt{a^2 - 4v}, \quad 2y = a - \sqrt{a^2 - 4v}$$

und vermöge der quadratischen Hülfsgleichung für v

$$\frac{a^2}{2} - v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}, \quad a^2 - 4v = -a^2 + 2\sqrt{\frac{a^5 + 4b}{5a}}.$$

Bezeichnet man den positiven Werth der letztern Quadratwurzel durch c, ferner die positiven Quadratwurzeln von $-a^2 + 2c$ und $-a^2 - 2c$ durch d und d', so erhält man die Auflösungen

$2x$	$a + d$	$a - d$	$a + d'$	$a - d'$
$2y$	$a - d$	$a + d$	$a - d'$	$a + d'$

Beispiel 7. Das System

$$ax + by = 2(x^2 - y^2)$$

$$-\frac{a}{x + y} + \frac{b}{x - y} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

ist dem homogenen System

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0$$

$$-at(x - y)xy + bt(x + y)xy - x^4 + y^4 = 0$$

untergeordnet. Indem man zu der zweiten Gleichung die mit $(x - y)$ multiplicirte erste Gleichung addirt, findet man als zweite Gleichung

$$(bty - x^2 + y^2)(x^2 + 2xy - y^2) = 0$$

oder $(bty - x^2 + y^2)(x + cy)(x + c'y) = 0$, wobei $c = 1 + \sqrt{2}$, $c^2 - 1 = 2c'$ und $c' = 1 - \sqrt{2}$ ist. Aus dem ersten System

$$atx + bty - 2x^2 + 2y^2 = 0, \quad bty - x^2 + y^2 = 0$$

folgt $t(ax - by) = 0$. Zu $t = 0$ gehört $y = \pm x$; zu $t = 1$, $ax - by = 0$ gehört $x = 0$, $y = 0$, und

$$x = b\frac{ab}{b^2 - a^2} \qquad y = a\frac{ab}{b^2 - a^2}$$

Aus dem andern System

$$ax + by - 2x^2 + 2y^2 = 0, \quad x + cy = 0$$

folgt $4cy^2 - (b - ac)y = 0$ u. s. w. Daher hat man die Auflösungen des gegebenen Systems

t	x	y	
0	x	$\pm x$	
1	0	0	3fach
	$b\frac{ab}{b^2 - a^2}$	$a\frac{ab}{b^2 - a^2}$	
	$\frac{ac - b}{4}$	$\frac{b - ac}{4c}$	
	$\frac{ac' - b}{4}$	$\frac{b - ac'}{4c'}$	

Beispiel 8. Wenn u und u' ternäre quadratische Formen sind (6), $u = ax^2 + ..$, $u' = a'x^2 + ..$, so giebt es 3 Multiplicatoren λ_1, λ_2, λ_3 von der Art, daß die abgeleiteten Formen $u + \lambda_1 u'$, $u + \lambda_2 u'$, $u + \lambda_3 u'$ Producte linearer Factoren $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, $p_3 q_3$ werden. Denn die Determinante der Form $u + \lambda u'$ ist eine cubische Function von λ, die bei 3 bestimmten Werthen von λ verschwindet. Das System $u = 0$, $u' = 0$ wird durch das System $p_1 q_1 = 0$, $p_2 q_2 = 0$ vertreten, dessen Auflösungen zugleich der Gleichung $p_3 q_3 = 0$ genügen. Vergl. Jacobi Crelle's J. 14 p. 286.

§. 7. Die cubischen und biquadratischen Gleichungen.

(Heis §§. 95—98. 69. 105.)

1. Wenn man die Glieder der Gleichung $m$ten Grades

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots = 0$$

der Reihe nach mit der geometrischen Progression $\frac{1}{v}$, 1, v . . . multiplicirt, so erhält man eine Gleichung desselben Grades, deren Wurzeln

zu den Wurzeln der gegebenen Gleichung das Verhältniß v haben. Denn die Substitution $x = y : v$ giebt nach Multiplication mit v^{m-1}

$$\frac{a}{v} y^m + by^{m-1} + cvy^{m-2} + \,.\,. = 0$$

Um in der transformirten Gleichung den Coefficienten 1 der höchsten Potenz der Unbekannten zu erhalten, setze man $v = a$. Um den zweiten Coefficienten dem ersten gleich zu erhalten, setze man $v = a : b$, u. s. w.

2. Wenn man in der Gleichung $y^m + by^{m-1} + acy^{m-2} + \,.\,. = 0$ $y = z - b : m$ setzt, so findet man für z eine Gleichung desselben Grades, welche z^{m-1} nicht enthält. Denn die Substitution $y = z + \lambda$ giebt

$$\begin{array}{r|l|l} z^m + m\lambda & z^{m-1} + \binom{m}{2}\lambda^2 & z^{m-2} + \,.\,. = 0 \\ + b & \quad + (m-1)b\lambda & \quad + \,.\,. \\ & \quad + ac & \quad + \,.\,. \\ & & \quad + \,.\,. \end{array}$$

eine Gleichung $m$ten Grades für z, welche entweder z^{m-1} oder z^{m-2} .. nicht enthält, nachdem man λ durch eine der Gleichungen

$$m\lambda + b = 0$$

$$\binom{m}{2}\lambda^2 + (m-1)b\lambda + ac = 0$$

u. s. w. bestimmt hat.

Die numerische Transformation von $ax^m + bx_{m-1} + \,.\,.$ wird am einfachsten zu Stande gebracht, indem man zuerst den Werth von $ax + b$ mit dem Werth von x multiplicirt und c addirt, indem man ferner den Werth von $ax^2 + bx + c$ mit x multiplicirt und d addirt, u. s. w. Z. B. Aus $3x^3 - 6x^2 + 5x - 4 = 0$

	−6		
1	2		
1	−4	15	
	2	−8	
1	−2	7	−36
	2	−4	14
1	0	3	−22

erhält man durch die Substitution $x = \frac{1}{3}y$ die Gleichung

$$y^3 - 6y^2 + 15y - 36 = 0$$

welche durch die Substitution $y = z + 2$ übergeht in

$$z^3 + 3z - 22 = 0$$

während $x = \frac{1}{3}(z + 2)$ ist.

Anmerkung. Nachdem man $ax + \lambda$, oder $ax^2 + \lambda x +$, oder $ax^3 + \lambda x^2 + \mu x + \nu$ gleich y gesetzt hat, findet man e Gleichung $m$ten Grades für y, welche durch Verfügung über λ, μ

nur m, $m - 1$, $m - 2$ Glieder behält, und eine Gleichung, welche x durch y eindeutig bestimmt *).

3. Die Auflösung einer cubischen Gleichung kann auf die Auflösung der besondern cubischen Gleichung

$$x^3 + 3ax + 2b = 0$$

zurückgeführt werden (2). Durch die Substitution $x = t + u$ erhält man die Gleichung

$$t^3 + 3t^2u + 3tu^2 + u^3 + 3a(t + u) + 2b$$
$$= t^3 + u^3 + 3(tu + a)(t + u) + 2b = 0$$

welcher, weil $t + u$ nicht null ist, durch die Gleichungen für t und u

$$t^3 + u^3 + 2b = 0 \qquad tu + a = 0$$

genügt werden kann. Aus dem System $t^3 + u^3 = -2b$, $t^3u^3 = -a^3$ findet man (§. 6, 8)

$$t^3 = -b + \sqrt{b^2 + a^3}$$
$$u^3 = -b - \sqrt{b^2 + a^3}$$

Wenn die Discriminante $b^2 + a^3$ nicht negativ ist, wenn die realen Cubikwurzeln von $-b + \sqrt{b^2 + a^3}$ und $-b - \sqrt{b^2 + a^3}$ durch t und u, die eigentlichen Cubikwurzeln von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9) durch

$$\alpha = -\tfrac{1}{2} + i.\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \alpha^2 = -\tfrac{1}{2} - i.\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

bezeichnet werden, so sind

$$t + u$$
$$\alpha t + \alpha^2 u = -\tfrac{1}{2}(t + u) + i.\tfrac{1}{2}(t - u)\sqrt{3}$$
$$\alpha^2 t + \alpha u = -\tfrac{1}{2}(t + u) - i.\tfrac{1}{2}(t - u)\sqrt{3}$$

Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung **), die erste real, die beiden andern conjugirt complex. Ueber die Rationalität der Wurzeln kann nur durch directe Versuche entschieden werden.

Die Binomien

$$t + \alpha u \qquad \alpha t + u \qquad \alpha t + \alpha u$$
$$t + \alpha^2 u \qquad \alpha^2 t + u \qquad \alpha^2 t + \alpha^2 u$$

genügen der gegebenen Gleichung nicht, weil die Producte ihrer Glieder αtu oder $\alpha^2 tu$, also nicht $-a$ betragen. In der That wird wie §. 6, 4

---

*) v. Tschirnhausen's Methode. Brief an Leibniz 1677 April 17. Acta Erud. 1683 p. 204. S. des Verf. Determ. §. 11.

**) Die reale Wurzel der cubischen Gleichung ist von Scipione dal Ferro 1505, bald darauf auch von Tartaglia erfunden, und von Cardano 1545 (Ars magna c. XI.) nebst dem Beweis mitgetheilt worden, weshalb sie den Namen „Cardanische Formel" führt. Vergl. Klügel math. W. I p. 34.

bewiesen, daß eine cubische Gleichung nicht mehr als 3 Wurzeln haben kann.

Wenn $b^2 + a^3$ null ist, so ist $u = t$, und die Gleichung hat 3 reale Wurzeln, von denen 2 einander gleich sind, $2t$, $-t$, $-t$. In der That ist $x^3 - 3c^2x - 2c^3 = (x - 2c)(x + c)^2$.

4. Wenn $b^2 + a^3$ negativ ist, so hat die Gleichung 3 verschiedene reale Wurzeln, welche in den obigen Formeln als Summen der Cubikwurzeln von conjugirt complexen Zahlen erscheinen. Um die Gleichung $x^3 - 3ax + 2b = 0$ unter der Voraussetzung $b^2 < a^3$ aufzulösen, setzt man (Allg. Arithm. §. 31, 11)

$$-b + \sqrt{b^2 - a^3} = -b \pm i\sqrt{a^3 - b^2} = \varrho(\cos\omega \pm i\sin\omega)$$

$$\text{d. h.}\quad \varrho^2 = a^3 \qquad \cos\omega = \frac{-b}{\varrho} = \frac{-b}{a^{\frac{3}{2}}}$$

und findet als Summen der Cubikwurzeln

$$2a^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{3}\omega \qquad 2a^{\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{3}\omega + \tfrac{2}{3}\pi) \qquad 2a^{\frac{1}{2}}\cos(\tfrac{1}{3}\omega + \tfrac{4}{3}\pi)$$

die Wurzeln der gegebenen Gleichung*).

Daß die cubische Gleichung in diesem Falle (casus irreducibilis) reale Wurzeln hat, erkennt man aus den Werthen der cubischen Function $f(x) = x^3 - 3ax + 2b$, welche realen x entsprechen**). Durch die Substitution $x = a^{\frac{1}{2}}y$ wird

$$f(x) = a^{\frac{3}{2}}g(y), \quad g(y) = y^3 - 3y + 2c, \quad c = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} < 1$$

Nun ist $g(2)$ positiv, $g(1)$ negativ, $g(0)$ positiv, $g(-1)$ positiv, $g(-2)$ negativ, und überhaupt $g(y)$ bei endlichen realen y continuirlich, real, endlich. Also wird $g(y)$ null, während x von 2 bis 1, von 1 bis 0, von -1 bis -2 geht (§. 2, 4), d. h. die Gleichung $g(y) = 0$ hat 3 reale Wurzeln, denen 3 reale Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entsprechen.

Anmerkung. Wenn a positiv ist, so hat die trinomische Gleichung

$$x^m - x - a = 0$$

eine positive Wurzel zwischen 1 und $1 + a$, welche unter den realen

*) Die Trisection des Winkels ω (die Berechnung von $\cos\frac{1}{3}\omega$ aus $\cos\omega$) t auf die Auflösung einer cubischen Gleichung von Bombelli 1579 reducirt wort . Das umgekehrte Verfahren kommt bei Vieta, Girard vor, und in constructi r Darstellung bei Descartes Géom. III. Vergl. Klügel math. W. I p. . 44. 53.

**) Stainville Corresp. s. l'Ec. polyt. 3 p. 58 und Mélanges d'an . p. 197.

Wurzeln der Gleichung die größte ist, weil $1^m - 1 - a$ negativ, $(1 + a)^m - 1 - 2a$ positiv ist. Dieser Wurzel nähert man sich durch die Berechnung von*)

$$b_1 = \sqrt[m]{a + \sqrt[m]{a}} \quad b_2 = \sqrt[m]{a + b_1} \quad b_3 = \sqrt[m]{a + b_2} \ldots$$

Denn es ist $b_1 > \sqrt[m]{a}$, $b_2 > b_1$, $b_3 > b_2$, .. und die Größen b_1, b_2, b_3, .. bilden eine steigende Reihe. Dabei hat man

$$b_k^m - b_{k-1} - a = 0, \quad b_k^m - b_k - a < 0.$$

Also kann keine der Größen b_1, b_2, b_3, .. die größte reale Wurzel der Gleichung $x^m - x - a = 0$ übersteigen.

5. Die Auflösung einer biquadratischen Gleichung kann auf die Auflösung der besondern biquadratischen Gleichung

$$x^4 + 4ax^2 + 8bx + 4c = 0$$

zurückgeführt werden (2). Die Wurzeln dieser Gleichung werden durch die Wurzeln einer bestimmten cubischen Gleichung (Resolvente) ausgedrückt**). Unter den Voraussetzungen

$$t + u + v = \alpha, \quad tu + tv + uv = \beta, \quad tuv = \gamma$$

ist $(y - t)(y - u)(y - v) = y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma$, d. h. die Gleichung $y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$ für die Unbekannte y hat die Wurzeln t, u, v (§. 4, 2). Wenn nun

$$x = \sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$$

so findet man

$$x^2 = \alpha + 2\sqrt{tu} + 2\sqrt{tv} + 2\sqrt{uv}$$
$$\tfrac{1}{4}(x^2 - \alpha)^2 = \beta + 2x\sqrt{\gamma}$$
$$x^4 - 2\alpha x^2 - 8x\sqrt{\gamma} + \alpha^2 - 4\beta = 0$$

Diese 2deutige biquadratische Gleichung für x hat demnach die 8deutige Wurzel $\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$, wenn t, u, v die Wurzeln der Resolvente d. i. der cubischen Gleichung $y^3 - \alpha y^2 + \beta y - \gamma = 0$ bedeuten.

---

*) Bolyai Tentamen in elem. math. etc. Maros Vasarhely 1832 t. 1 p. 413.

**) Diese Erfindung ist von Ludovico Ferrari gemacht, von Cardano 1545 (Ars magna c. 39) und Bombelli 1572 mitgetheilt worden. Vergl. Klügel math. W. I p. 38. Die zur Auflösung der biquadratischen Gleichung erforderliche cubische Gleichung heißt die Resolvente derselben bei Euler, Réduite bei Clairaut u. A. Man kann auch aus der vollständigen biquadratischen Gleichung mit 5 Gliedern die verkürzte cubische Resolvente mit 3 Gliedern ableiten. Vergl. Aronhold Crelle J. 52 p. 95. Fiebler Elem. d. Geom. u. Algebra p. 163. Bei dieser Reduction ist die Determination weniger einfach.

Die aufzulösende biquadratische Gleichung stimmt mit der auflösbaren überein unter den Bedingungen

$$4a = -2\alpha \quad 8b = -8\sqrt{\gamma} \quad 4c = \alpha^2 - 4\beta$$

d. h. $\alpha = -2a$, $\beta = a^2 - c$, $\gamma = b^2$, also ist die Resolvente der gegebenen Gleichung

$$y^3 + 2ay^2 + (a^2 - c)y - b^2 = 0$$

Aus den Wurzeln t, u, v der Resolvente findet man als Wurzeln der gegebenen Gleichung die 4 Werthe der Formel $\sqrt{t} + \sqrt{u} + \sqrt{v}$, welche der Bedingung $\sqrt{t}\sqrt{u}\sqrt{v} = \sqrt{\gamma} = -b$ genügen.

Diese Methode der Auflösung, welche auf der Formation einer Gleichung mit gegebenen Wurzeln beruht, ist von Euler 1738 Comm. Petrop. 6 p. 218 erfunden worden. Ferrari hatte

$$a^3(ax^4 + 4bx^3 + cx^3 + dx + e)$$

durch die Differenz von 2 Quadraten

$$(a^2x^2 + 2abx + A)^2 - (Bx + C)^2$$

dargestellt. Ebenso hat Descartes (Géom. III) $x^4 + ax^2 + bx + c$ in das Product $(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma)$ verwandelt, u. s. w.

6. Die Resolvente hat eine positive reale Wurzel v, weil die cubische Function $y^3 + 2ay^2 + (a^2 - c)y - b^2$ bei $y = 0$ negativ, bei hinreichend großen positiven y positiv ist (4). Also ist $\sqrt{v}$ real, ihr Zeichen wird durch das Zeichen des Products $\sqrt{t}\sqrt{u}$ bestimmt.

Das Product tu der beiden andern Wurzeln der Resolvente ist positiv, weil $tuv = b^2$ positiv ist. Wenn nun t, u real und beide positiv sind, so hat die aufzulösende biquadratische Gleichung 4 reale Wurzeln. Wenn t, u beide negativ sind, so hat die Gleichung 2 Paare von complexen Wurzeln. Denn unter den Voraussetzungen $t = -g^2$, $u = -h^2$ hat $\sqrt{t} + \sqrt{u}$ die Werthe

$$ig + ih, \quad -ig - ih, \quad ig - ih, \quad -ig + ih$$

In den beiden ersten Fällen ist das Product $\sqrt{t}\sqrt{u}$ negativ, in den beiden letzten Fällen positiv.

Wenn aber t, u conjugirt complex sind, so hat die biquadratische Gleichung ein Paar complexe und 2 reale Wurzeln. Denn unter den Voraussetzungen

$$t = 2p + 2iq, \quad u = 2p - 2iq, \quad r^2 = p^2 + q^2$$

findet man (Allg. Arithm. §. 16, 7)

$$\sqrt{t} = \sqrt{r+p} + i\sqrt{r-p}, \quad \sqrt{u} = \sqrt{r+p} - i\sqrt{r-p}$$

und die zusammengehörigen Werthe

$\sqrt{t}+\sqrt{u}$	$2\sqrt{r+p}$	$-2\sqrt{r+p}$	$2i\sqrt{r-p}$	$-2i\sqrt{r-p}$
$\sqrt{t}\sqrt{u}$	$2r$	$2r$	$-2r$	$-2r$

Wenn insbesondere $t = u$, so sind 2 Werthe von $\sqrt{t} + \sqrt{u}$ null, 2 Wurzeln der biquadratischen Gleichung einander gleich. Wenn $t = u = v$, so sind 3 Wurzeln $\sqrt{t}$ eindeutig, die 4te $3\sqrt{t}$. Wenn endlich 2 oder 3 Wurzeln der Resolvente null sind, so hat die biquadratische Gleichung 2 Paare gleicher Wurzeln oder 4 gleiche Wurzeln.

Die Unmöglichkeit, die Wurzeln einer allgemeinen Gleichung, deren Grad den 4ten übersteigt, durch Wurzeln reiner Gleichungen oder durch Wurzeln von Gleichungen niederer Grade auszudrücken, wurde von Gauß 1799 (Demonstr. nova 9) vermuthet und von Abel 1825 (Crelle J. 1 p. 65) bewiesen. Vergl. Wantzel in Serret Alg. sup. 516. Scheibner Berichte der Leipz. Ges. d. W. 1863 p. 63. Daß die allgemeine Gleichung 5ten Grades mit Hülfe transscendenter Functionen aufgelöst werden kann, hat Hermite gezeigt (Compt. rend. 1858[a] p. 508). Vergl. Kronecker Monatsbericht der Berliner Acad. 1861 Juni 27. Brioschi Istituto Lombardo 1858 Nov. 25.

7. Wenn unter den Coefficienten der Gleichung $2n$ten Grades

$$a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0$$

die ersten $n + 1$ willkürlich, die folgenden aber so gegeben sind, daß

$$a_{n+1} = a_{n-1}\varepsilon, \quad a_{n+2} = a_{n-2}\varepsilon^2, \ldots, a_{n+k} = a_{n-k}\varepsilon^k, \ldots$$

ist, so gehören die Wurzeln der Gleichung paarweise zusammen. Das Product von je zwei zusammengehörigen Wurzeln ist ε, und die Summe derselben ist eine Wurzel einer bestimmten Resolvente $n$ten Grades. Wenn insbesondere $\varepsilon = 1$ ist, so heißt die gegebene Gleichung reciprok *).

Indem man nämlich durch x^n dividirt, findet man die Gleichung

$$a_n + a_{n-1}\left(x + \frac{\varepsilon}{x}\right) + \ldots + a_0\left(x^n + \frac{\varepsilon^n}{x^n}\right) = 0$$

welche bei der Vertauschung von x mit $\frac{\varepsilon}{x}$ unverändert bleibt. Wenn also α eine Wurzel dieser Gleichung ist, so ist auch $\frac{\varepsilon}{\alpha}$ eine Wurzel derselben.

---

*) Nach Euler Comm. Petrop. 1738 t. 6 p. 223. Die Bildung der Resolvente fällt mit der von Jac. Bernoulli (Mém. de Paris 1702. Opp. II n° 97) gegebenen Entwickelung von $\cos kx$ nach Potenzen von $\cos x$ zusammen, und war auch von Moivre (Misc. anal. III, 4) gezeigt worden. Den hierzu erforderlichen Ausdruck von $x^k + y^k$ durch $x + y$ und xy hat Lagrange (Mém. de Berlin 1768. Nouvelle méthode etc. §. 1) als besondern Fall eines allgemeinern Ausdrucks dargestellt.

Setzt man $x + \frac{\varepsilon}{x} = u$, folglich (Allg. Arithm. §. 9, 5)

$$x^2 + \frac{\varepsilon^2}{x^2} = u^2 - 2\varepsilon$$

$$x^3 + \frac{\varepsilon^3}{x^3} = u^3 - 3u\varepsilon$$

$$x^4 + \frac{\varepsilon^4}{x^4} = u^4 - 4u^2\varepsilon + 2\varepsilon^2$$

u. s. w., so erhält man die Resolvente $n$ten Grades für u

$$a_n + a_{n-1}u + a_{n-2}(u^2 - 2\varepsilon) + a_{n-3}(u^3 - 3u\varepsilon) + \ldots = 0$$

Durch Auflösung der quadratischen Gleichung für x

$$x^2 - ux + \varepsilon = 0$$

findet man zu jeder Wurzel der Resolvente ein Paar Wurzeln der gegebenen Gleichung.

8. Wenn unter den Coefficienten der Gleichung $(2n + 1)$ten Grades

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

die ersten $n + 1$ willkürlich, die folgenden aber so gegeben sind, daß

$$a_{n+1} = a_n \varepsilon, \quad a_{n+2} = a_{n-1}\varepsilon^3, \ldots, \quad a_{n+1+k} = a_{n-k}\varepsilon^{2k+1}, \ldots$$

ist, so hat eine Wurzel der Gleichung den Werth $-\varepsilon$, und die übrigen Wurzeln sind so gepaart, daß das Product jedes Paares ε^2 ergiebt. Denn das Polynomium

$$a_0(x^{2n+1} + \varepsilon^{2n+1}) + a_1 x(x^{2n-1} + \varepsilon^{2n-1}) + a_2 x^2(x^{2n-3} + \varepsilon^{2n-3}) + \ldots$$

ist durch $x + \varepsilon$ theilbar (Allg. Arithm. §. 12, 5). Der Quotient ist

$$\begin{array}{ll|ll|ll|l} a_0 x^{2n} & - a_0\varepsilon & x^{2n-1} & + a_0\varepsilon^2 & x^{2n-2} & - \ldots - a_0\varepsilon & \varepsilon^{2n-2}x + a_0\varepsilon^{2n} \\ & + a_1 & & - a_1\varepsilon & & + \ldots + a_1 & \\ & & & + a_2 & & - \ldots & \\ & & & & & + \ldots & \end{array}$$

Setzt man nun sowohl den Divisor $x + \varepsilon$, als auch den Quotienten der Null gleich, so erhält man als Wurzeln der gegebenen Gleichung $-\varepsilon$ und die Wurzeln einer besondern Gleichung $2n$ten Grades, deren Coefficienten den vorher (8) gestellten Bedingungen genügen.

9. Die gebrochne Function mit positiven Zählern

$$y = \frac{a^2}{\alpha - x} + \frac{b^2}{\beta - x} + \frac{c^2}{\gamma - x} + 1 \quad (\alpha < \beta < \gamma)$$

ist 1 bei unendlichem x, ∞ bei $x = \alpha, \beta, \gamma$, übrigens in stetem Wachs

bei wachsendem x. Während x von $-\infty$ bis α geht, ist $\alpha - x$ positiv, und die Function wächst von 1 bis ∞. Während x von α bis β geht, ist $\alpha - x$ negativ, $\beta - x$ positiv, und die Function wächst von $-\infty$ bis $+\infty$. Während x von β bis γ geht, ist $\beta - x$ negativ, $\gamma - x$ positiv, und die Function wächst von $-\infty$ bis $+\infty$. Während x von γ bis ∞ geht, ist $\gamma - x$ negativ, und die Function wächst von $-\infty$ bis 1.

Die Gleichung $y = 0$ für die Unbekannte x ist dadurch ausgezeichnet, daß sie lauter reale Wurzeln hat, je eine zwischen α, β, γ, ∞*).

§. 8. Transscendente Gleichungen und Auflösung numerischer Gleichungen.

(Heis §§. 106. 100.)

1. Die einfachste Classe von transscendenten Gleichungen bilden die Exponentialgleichungen, in denen unbekannte Exponenten von bekannten oder unbekannten Dignanden vorkommen, die logarithmischen Gleichungen, in denen Logarithmen von unbekannten Zahlen vorkommen, und die goniometrischen Gleichungen, in denen goniometrische Functionen von unbekannten Winkeln (Arcus) vorkommen.

Wenn die Exponentialgleichung binomisch ist und nur bekannte Dignanden enthält, so kann sie auf eine algebraische Gleichung reducirt werden. Denn aus der Gleichung

$$a^p b^q = c^r d^s$$

folgt (Allg. Arithm. §. 19) die Gleichung

$$p \log a + q \log b = r \log c + s \log d$$

welche algebraisch ist, wenn a, b, c, d bekannt sind und p, q, r, s algebraische Functionen von einer oder mehr Unbekannten bedeuten. Dabei ist jeder Logarithmus unendlichdeutig (Allg. Arithm. §. 31).

Umgekehrt ist die Gleichung $p \log t + q \log u = r \log v$ gleichbedeutend mit der Gleichung $t^p u^q = v^r$, welche algebraisch ist, wenn p, q, r bekannt und t, u, v algebraische Functionen von einer oder mehr Unbekannten sind.

Die Exponentialgleichung $a + bp^{\beta x} + cp^{\gamma x} + .. = 0$ wird durch die Substitution $p^x = y$ auf die Gleichung $a + by^\beta + cy^\gamma + .. = 0$ reducirt.

Die Gleichung $x^{a + b \log x} = c$ oder $(a + b \log x) \log x = \log c$

*) Jacobi Crelle J. 12 p. 25. Dynamik p. 199.

wird durch die Substitution $\log x = y$ auf die Gleichung $ay + by^2 = \log c$ reducirt *).

2. Goniometrische Gleichungen sind algebraisch reducibel, wenn sie nach gehöriger Entwickelung nur eine Function eines unbekannten Winkels und Potenzen derselben mit gegebenen Exponenten enthalten. Z. B. Die Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$ kann reducirt werden, indem man $\sin x = y$, $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$ setzt. Einfacher kommt man zum Ziele, wenn man

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha$$

setzt, so daß α und r aus den Gleichungen

$$\cot \alpha = \frac{a}{b}, \quad r = \frac{a}{\cos \alpha}$$

gefunden werden. Dadurch erhält man statt der gegebenen Gleichung

$$r \sin x \cos \alpha + r \sin \alpha \cos x = c$$

$$\sin(x + \alpha) = \frac{c}{r}$$

woraus sich zwei supplementäre Werthe von $x + \alpha$ ergeben.

Die Gleichung $\sin x = a \sin(\alpha - x)$ wird reducirt, indem man

$$x = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$
$$\alpha - x = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

setzt, und die Gleichung $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = a \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ entwickelt. Man erhält

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\beta = \frac{a - 1}{a + 1} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha$$

und findet daraus 2 um 180^0 verschiedene Werthe von $\frac{1}{2}\beta$, und durch Addition derselben zu $\frac{1}{2}\alpha$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

Um das System **)

$$x \sin(\alpha - y) = a$$
$$x \sin(\beta - y) = b$$

für x und y aufzulösen, bilde man

$$\sin(\alpha - y) + \sin(\beta - y) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a + b}{x}$$

$$\sin(\alpha - y) - \sin(\beta - y) = 2 \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y) \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{x}$$

und daraus durch Division

*) Heis §§. 61. 65. 69. 73.
**) Gauß theoria motus 78.

$$\tang \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - 2y) = \frac{a+b}{a-b} \tang \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

zur Berechnung von y, aus dessen Werth x sich ergiebt.

3. Transscendente Gleichungen, welche sich auf algebraische nicht reduciren lassen, sind z. B. $a^x + b^x = c$, $a^x = bx + c$, $x^x = a$, $ax + b\log x + cx\log x = 0$, $\cos x = x$, $\cot x = x$, $\tang x = x$, $x - a\sin x = b$, u. s. f. In den angeführten goniometrischen Gleichungen bedeutet die Zahl x den Arcus eines Winkels d. h. das Verhältniß eines Centriwinkels zu dem πten Theile von 180^0, oder was dasselbe ist, das Verhältniß des eingeschriebenen Kreisbogens zum Radius, oder den Kreisbogen selbst, wenn der Radius eine Längeneinheit ist. Hat der Bogen x Radien und der Centriwinkel y Grad, so ist

$$x = \frac{y\pi}{180}, \quad \log x = \log y + 8{,}2419 - 10$$

Und wenn der Centriwinkel y Minuten hat, so ist

$$x = \frac{y\pi}{180.60}, \quad \log x = \log y + 6{,}4637 - 10$$

Die Zahlen $\log(\pi : 180)$ und $\log(\pi : 180.60)$ werden in den Tabellen durch $\log 1^0$ und $\log 1'$ bezeichnet.

4. Die realen Wurzeln von Gleichungen beliebiger Art können mit jeder erforderlichen Genauigkeit begrenzt werden, wenn die Gleichungen numerisch (numerales) sind d. h. wenn in ihnen unbestimmte Zahlen nicht vorkommen. Um zu erkennen, bei welchen realen x die gegebene Function $f(x)$ verschwindet, berechne man die Anfänge einer Tabelle, welche neben realen x die entsprechenden Werthe $f(x)$ enthält. Wenn nun in der Tabelle auf den Werth $f(a)$ ein Werth $f(b)$ von entgegengesetztem Zeichen folgt, und $f(x)$ von $f(a)$ zu $f(b)$ stetig und ohne Umkehr übergeht, während x von a zu b übergeht, so hat die Gleichung $f(x) = 0$ eine (und nicht mehr als eine, einfache oder mehrfache) zwischen a und b liegende Wurzel (§. 2, 4). Um diese Wurzel enger zu begrenzen, vervollständige man die Tabelle durch Berechnung von $f(x)$ für Werthe von x zwischen a und b. Diese Arbeit wird wesentlich erleichtert und auf das Nöthigste beschränkt durch Anwendung der regula falsorum, wie die Algebristen des 15ten und 16ten Jahrhunderts gezeigt haben. Vergl. Euler Introd. I cap. 22. Die gesuchte Differenz der Variablen ist nämlich um so genauer proportional der erforderlichen Differenz der Function, je kleiner die letztere Differenz ist (§. 2, 5).

Beispiel 1. Um die Gleichung $10^x = x^{10}$ aufzulösen, nimmt man die Logarithmen beider Seiten und erhält $x = 10\log x$, $10\log x - x = 0$.

Bezeichnet man die Function $10 \log x - x$ durch y, und berechnet die Werthe von y für $x = 0, 1, 2$, welche in der nebenstehenden Tabelle enthalten sind, so erkennt man, daß y verschwindet bei einem Werth von x zwischen 1 und 2, daß der Aenderung von y um 2,01 die Aenderung von x um 1 entspricht. Nach der Regel entspricht dann der Aenderung von y um 1 die Aenderung von x um ungefähr

x	y
0	$-\infty$
1	-1
2	1,01

$$\frac{1 \,.\, 1}{2{,}01} = 0{,}4$$

Demnach berechnet man neue Werthe von y, aus denen man erkennt, daß y verschwindet bei einem Werth von x zwischen 1,4 und 1,3; daß der Aenderung von y um 0,221 die Aenderung von x um 0,1 entspricht. Also entspricht der Aenderung von y um 0,061 die Aenderung von x um

x	y
1,4	0,061
1,3	$-$ 0,160

$$\frac{0{,}1 \,.\, 0{,}061}{0{,}221} = 0{,}028$$

welche auf $x = 1{,}4 - 0{,}028 = 1{,}372$ hinzeigt. Nun berechnet man neue Werthe von y, welche zu erkennen geben, daß y verschwindet bei einem Werth von x zwischen 1,372 und 1,371, daß der Aenderung von y um 0,0021 die Aenderung von x um 0,001 entspricht. Demnach entspricht der Aenderung von y um 0,0006 die Aenderung von x um

x	y
1,372	0,0015
1,371	$-$ 0,0006

$$\frac{0{,}001 \,.\, 0{,}0006}{0{,}0021} = 0{,}0003$$

welche $x = 1{,}3713$ als die gesuchte Wurzel anzeigt. Zu größerer Annäherung auf demselben Wege führen ausführlichere Tabellen der Logarithmen. Die Geschwindigkeit der Annäherung wird in der Nähe größer.

Beispiel 2. Die Gleichung $5^x + 6^x = 7x^2$ hat eine Wurz[illegible] zwischen 0 und -1, denn $5^x + 6^x - 7x^2$ hat für $x = 0$ den Wer[illegible] 2, für $x = -1$ den Werth $-6\frac{1}{3}\frac{9}{0}$. Setzt man

$$\log(5^x + 6^x) - \log x^2 - \log 7 = y$$

so erhält man folgendes System:

x	y
— 0,3	0,2803
— 0,4	— 0,0434
— 0,387	— 0,0050
— 0,3853	— 0,0002

Damit y verschwindet, ist die Variable von — 0,4 nach — 0,3 um $\frac{0,1 \,.\, 434}{3237} = 0,013$ zu ändern. Ferner ist x von — 0,4 nach — 0,387 um $\frac{0,013 \,.\, 50}{384} = 0,0017$ zu ändern, wodurch man eine Wurzel der gegebenen Gleichung zwischen — 0,3853 und — 0,3852 findet.

Beispiel 3. Um die Gleichung $\cos x = x$ aufzulösen, setze man $\log x - \log\cos x = z$. Unter Zuziehung des Winkels y (3) findet man folgendes System:

y	z
45°	0,0456
40°	— 0,0403
42° 20′	— 0,0003
42° 21′	0,0000

Der Winkel ist von 45° nach 40° um $\frac{5^0 \,.\, 403}{859} = 2^0,33$ zu ändern, damit z verschwindet, u. s. w. Aus dem letzten Werth von y wird der gesuchte Werth von x berechnet.

Beispiel 4. Wenn eine Versorgungsanstalt p Procent jährlich zu capitalisirende Zinsen berechnet, und 100 Gulden gegen eine 35jährige Rente von 6 Gulden zahlt, so ist $\frac{6}{p}(1 - 1{,}0p^{-35}) = 1$ (Allg. Arithm. §. 22, 6). Setzt man $\log 6 + \log(1 - 1{,}0p^{-35}) - \log p = y$, so ergiebt sich eine reale Wurzel der Gleichung aus folgendem System:

p	y
4	0,0492
5	— 0,0076
4,87	— 0,0005
4,86	0,0001

Damit y verschwindet, hat man p von 5 nach 4 um $\frac{76}{568} = 0,13$ zu ändern; ferner von 4,86 nach 4,87 um $\frac{0,01}{6} = 0,002$. Die gesuchte Wurzel hat demnach den Werth 4,862.

Hierher gehört auch Gauß' Auflösung der trinomischen Gleichungen (Beiträge zur Theorie der algebr. Gleich. 1849. Abhandl. der Gött. Ges. d. Wiss. IV).

5. Bei algebraischen Gleichungen läßt sich statt der vorigen allgemeinen Methode eine beträchtlich einfachere anwenden, welche Newton (Brief an Oldenburg 1676 Jun. 13, ausführlicher im Anfang der methodus fluxionum) gelehrt hat.

Statt einer über 10 betragenden Wurzel kann ihr 10ter, 100ter, .. Theil gesucht werden (§. 7, 1), so daß nächst den Einern der Wurzel immer nur ein echter Bruch durch Transformationen der gegebenen Gleichung zu bestimmen bleibt.

Beispiel 1. $y = x^3 - 2x - 5$ geht aus dem Negativen ins Positive, während x von 2 bis 3 steigt. Also hat die Gleichung $y = 0$ eine reale Wurzel $x = 2 + p$, wobei p einen näher zu berechnenden echten Bruch bedeutet. Durch die Substitution $x = 2 + p$ findet man (nach dem §. 7, 2 angezeigten Verfahren) die erste Transformirte

$$y = -1 + 10p + 6p^2 + p^3$$

deren Anfangsglieder überwiegen. Um den Werth von p zu berechnen, bei welchem $y = 0$ wird, macht man den Versuch

$$-1 + 10p = 0, \quad p = 0,1\,.., \quad 6p^2 + \,.. = 0,06\,..$$

so daß bei unsichern Hunderteln des Dividenden

$$p = 1,0\,..:10 = 0,1 + q$$

gesetzt wird. Durch diese Substitution findet man die zweite Transformirte

$$y = 0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$$

Der Versuch $0,061 + 11,23q = 0$, $q = -0,005\,..$, $6,3q^2 + \,.. = 0,0001\,..$ giebt bei unsichern Zehntausendteln des Dividenden

$$q = -0,061\,..:11,23 = -0,0054 + r$$

Durch diese Substitution findet man die dritte Transformirte, und zwar abgekürzt, indem man die Potenzen von q nach steigenden Potenzen von r entwickelt,

$$\begin{array}{rrrr} y = & 0,061 & & \\ & -\;0,060\,642 & +\;11,23r & \\ & +\;0,000\,183\,708 & -\;0,0680r & * \\ & -\;0,000\,000\,157 & +\;0,0001r & * \\ \hline & 0,000\,541\,551 & +\;11,1621r & * \end{array}$$

Der Versuch $0,000\,541\,551 + 11,1621\,r = 0$ giebt $r = -0,000\,048\,516$. Also ist

$$\begin{array}{rr} x = & 2,1 \\ & -\;0,005\,4 \\ & -\;0,000\,048\,516 \\ \hline & 2,094\,551\,484. \end{array}$$

Beispiel 2. $y = x^5 - 6x - 10$ geht aus dem Negativen ins Positive, während x von 1 bis 2 steigt. Also hat die Gleichung $y = 0$ die Wurzel $x = 2 + p$. Durch diese Substitution findet man die erste Transformirte

$$y = 10 + 74p + 80p^2 + 40p^3 + 10p^4 + p^5$$

Der Versuch $10 + 74p = 0$ giebt $p = -0,13$ mit geringer Annäherung, weil $80p^2 + \,.. = 1,3\,...$ Durch den Versuch $10 + 74p + 80p^2 = 0$ findet man den genauern Werth $p = -0,16\,..$ nebst

$40p^3 + \ldots = -0{,}16\ldots$ Daher bildet man durch die Substitution $p = -0{,}16 + q$ die zweite Transformirte abgekürzt

$$\begin{array}{rrrr} y = \quad 10 & & & \\ -\ 11{,}84 & +\ 74q & & \\ +\ 2{,}048 & -\ 25{,}6q & +\ 80q^2 & \\ -\ 0{,}163\,84 & +\ 3{,}072q & -\ 19{,}2q^2 & * \\ +\ 0{,}006\,5536 & -\ 0{,}1638q & +\ 1{,}5q^2 & * \\ -\ 0{,}000\,1048 & +\ 0{,}0033q & * & * \\ \hline 0{,}050\,6088 & +\ 51{,}3114q & +\ 62{,}3q^2 & * \end{array}$$

Der Versuch $0{,}050\ldots + 51,\ldots q = 0$ giebt

$$q = -0{,}001\ldots \text{ und } 62{,}3q^2 + \ldots = 0{,}000\,06\ldots$$

Also setzt man

$$q = -0{,}0506 : 51{,}3 = -0{,}000\,986 + r$$

und bildet die dritte Transformirte

$$\begin{array}{rr} y = \quad 0{,}050\,6088 & \\ -\ 0{,}050\,5930 & +\ 51{,}3r \\ +\ 0{,}000\,0604 & -\ 0{,}1r \\ \hline 0{,}000\,0762 & +\ 51{,}2r \end{array}$$

welche bei $r = -0{,}000\,001\,49$ verschwindet. Daher ist

$$\begin{array}{r} x = \quad 2 \\ -\ 0{,}16 \\ -\ 0{,}000\,986 \\ -\ 0{,}000\,001\,49 \\ \hline 1{,}839\,012\,51. \end{array}$$

Beispiel 3. $y = x^3 - 7x + 7$ verschwindet zweimal, während x von 1 bis 2 steigt. Durch die Substitution $x = 1{,}5 + p$ erhält man die erste Transformirte

$$y = -0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 + p^3$$

und $-0{,}125 - 0{,}25p + 4{,}5p^2 = 0$ giebt $p = 0{,}2$ und $-0{,}14$.

I. Durch die Substitution $p = 0{,}2 + q$ erhält man

$$y = 0{,}013 + 1{,}67q + 5{,}1q^2 + q^3$$

Der Versuch $0{,}013 + 1{,}67q = 0$ giebt

$q = -0{,}013 : 1{,}67 = -0{,}008 + r$, weil $5{,}1q^2 + \ldots = 0{,}0003\ldots$

Aus der Transformirten

$$y = -0{,}000\,034\,112 + 1{,}588\,592r + 5{,}076r^2 + r^3$$

schließt man

$$r = 0{,}000\,034\,11 : 1{,}5886 = 0{,}000\,021\,48$$
$$x = 1{,}692\,021\,48.$$

II. Durch die Substitution $p = -0,14 + q$ erhält man

$$y = -0,004\,544 - 1,4512q + 4,08q^2 + q^3$$

Der Versuch $-0,004\,544 - 1,4512q = 0$ giebt

$q = -0,0045 : 1,45 = -0,0031$, weil $4,08q^2 + .. = 0,000\,03..$

$$x = 1,3569.$$

Beispiel 4. $6x^3 - 141x + 263$ verschwindet zweimal, während x von 2 bis 3 steigt. Durch die Substitution $x = 2,8 + p$ erhält man

$$y = -0,088 + 0,12p + 50,4p^2 + 6p^3$$

Der Versuch $-0,088 + 0,12p + 50,4p^2 = 0$ giebt $p = 0,03$ und $-0,05$.

I. Durch die Substitution $p = 0,03 + q$ erhält man

$$y = -0,038\,878 + 3,1602q + 50,94q^2 + 6q^3$$

Der Versuch $-0,038\,878 + 3,1602q = 0$ giebt nur

$q = 0,01 + r$, weil $50,94q^2 + .. = 0,005...$

Aus der Transformirten

$$y = -0,002\,176 + 4,1808r + 51,12r^2 + 6r^3$$

folgt $r = 0,0005$, weil $51,12r^2 + .. = 0,000\,01...$ Die nächste Transformirte

$$y = -0,000\,072\,819\,25 + 4,231\,9245s + 51,129s^2 + 6s^3$$

giebt $s = 0,000\,017\,21$, weil $51s^2 + .. = 0,000\,000\,005..$, so daß

$$x = 2,800\,517\,21.$$

II. Durch die Substitution $p = -0,05 + q$ erhält man

$$y = 0,031\,25 - 4,875q + 49,5q^2 + 6q^3$$

Hieraus folgt $q = 0,007 + r$ weil $49,5q^2 + .. = 0,002...$ Die nächste Transformirte

$$y = -0,000\,447\,442 - 4,181\,118r + 49,626r^2 + 6r^3$$

giebt $r = -0,000\,107$, weil $49,6r^2 + .. = 0,000\,0005..$, so daß

$$x = 2,756\,893.$$

Anmerkung. Newton's Methode hat durch Euler, Lagrange u. A. eine angeblich einfachere Darstellung erhalten, indem man für die Correctionen $p, q, ..$ eine allgemeine Formel aufstellte. Nur diese in der Praxis mühevollere Darstellung wird von den Einwendungen getroffen, welche Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 311, Traité des équat. Note V) gegen die Newton'sche Methode erhoben hat. Vergl. einen Aufsatz des Verf. in den Leipziger Berichten 1866 p. 358.

§. 9. Besondere Auflösung unbestimmter Gleichungen.

(Heis §§. 77—80.)

1. Eine unbestimmte Gleichung oder ein unbestimmtes System von Gleichungen hat im Allgemeinen unendlich viele Auflösungen (§. 5). Wenn insbesondere die Coefficienten der Gleichungen ganze (rationale) Zahlen sind, so entsteht die Frage, durch welche ganze (rationale) Werthe der Unbekannten den Gleichungen genügt werden kann (Diophantische Aufgabe). Die Beantwortung dieser Frage ist der Gegenstand der unbestimmten Analytik (analyse indéterminée), welche mit der höheren Arithmetik (Zahlenlehre) im engsten Zusammenhange steht.

2. Wenn a und b ganze Zahlen und prim zu einander sind, so lassen sich unendlich viele Systeme ganzer Zahlen x, y angeben, die der linearen Gleichung $ax + by = c$ genügen. Man bilde nach dem Modul b die Reste der Zahlen c, $c - a$, $c - 2a, \ldots,$ $c - (b - 1)a$. Diese b Reste sind von einander verschieden (Allg. Arithm. §. 13, 19) und geringer als b, also muß einer derselben 0 sein. Hat $c - ax$ nach dem Modul b den Rest 0, so ist der Quotient eine ganze Zahl y. Wenn aber x und y der gegebenen Gleichung genügen, so genügen ihr auch $x + bz$ und $y - az$, weil

$$a(x + bz) + b(y - az) = ax + by = c.$$

Wenn δ der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen a und b ist, so giebt es keine ganzen Zahlen x und y, welche der Gleichung $ax + by = c$ genügen, außer in dem Falle, daß auch c durch δ theilbar ist. Wenn nun x und y der gegebenen Gleichung genügen, so genügen ihr auch $x + \frac{b}{\delta}z$ und $y - \frac{a}{\delta}z$, und es giebt δ Werthe von x, die nach dem Modul b incongruent sind, und ebensoviel nach dem Modul a incongruente Werthe von y.

3. Um die Gleichung $ax + by = c$ in ganzen Zahlen aufzulösen, wählt man, wenn a prim zu b und $a < b$, die Anordnung $ax = c - by$, woraus durch Division

$$x = d - ey + \frac{c_1 - a_1 y}{a}$$

folgt. Weil aber $c_1 - a_1 y$ durch a theilbar sein soll, so setzt man

$$c_1 - a_1 y = ap, \quad a_1 y = c_1 - ap$$

und findet wiederum durch Division

$$y = d_1 - e_1 p + \frac{c_2 - a_2 p}{a_1}$$

wobei $c_1 - a_2 p$ durch a_1 theilbar sein soll, u. s. w. Die Reihe der Reste $a_1, a_2, ..$ fällt bis auf 1 herab (Allg. Arithm. §. 13, 3), und dabei geht die Reihe der erforderlichen Substitutionen zu Ende. Durch einen besondern Werth der letzten Unbestimmten werden dann alle vorausgehenden Unbestimmten ausgedrückt. Die Anzahl der Divisionen wird möglichst klein, wenn man die kleinsten (nach Befinden negativen) Reste gebraucht.

Beispiel 1.

$$7x = 1000 - 24y \qquad x = 143 - 3y - \frac{3y + 1}{7}$$

$$3y = -1 + 7p \qquad y = 2p + \frac{p - 1}{3}$$

$$p = 1 + 3q$$

Insbesondere ist $p = 1$, $y = 2$, $x = 136$, also allgemein (2)

$$x = 136 - 24q, \quad y = 2 + 7q$$

worin q jede ganze Zahl (positiv oder negativ) bedeutet.

Beispiel 2. Um 243 in 2 Theile zu theilen, von denen der eine durch 24, der andere durch 65 theilbar ist, setze man den ersten Theil $= 24x$, den zweiten Theil $= 65y$, und $24x + 65y = 243$.

$$24x = 243 - 65y \qquad x = 10 - 3y + \frac{7y + 3}{24}$$

$$7y = 3(-1 + 8p) \qquad y = 3\left(p + \frac{p - 1}{7}\right)$$

$$p = 1 + 7q$$

Für $q = 0$ erhält man $p = 1$, $y = 3$, $x = 2$, folglich überhaupt

$$y = 3 + 24q, \quad x = 2 - 65q$$

Die vorgelegte Aufgabe hat nur eine Auflösung in positiven ganzen Zahlen. Mit dieser Aufgabe trifft die Forderung zusammen, den Bruch $\frac{243}{24 . 65}$ in die Summe von zwei Brüchen zu zerlegen, deren Nenner 65 und 24 sind.

Beispiel 3. Um die Zahlen zu finden, welche nach dem Modul 27 den Rest 14, nach dem Modul 37 den Rest 25 haben, setze man $27x + 14 = 37y + 25$.

$$27x = 11 + 37y \qquad x = y + \frac{10y + 11}{27}$$

$$10y = -11 + 27p \qquad y = -1 + 3p - \frac{3p + 1}{10}$$

$$3p = -1 + 10q \qquad p = 3q + \frac{q - 1}{3}$$

$$q = 1 + 3r$$

Für $r = 0$ erhält man $q = 1$, $p = 3$, $y = 7$, $x = 10$, also überhaupt

$$y = 7 + 27r, \quad x = 10 + 37r$$

Die gesuchten Zahlen sind

$$37(7 + 27r) + 25 = 27(10 + 37r) + 14 = 284 + 999r$$

4. Die zur Auflösung der Gleichung $ax - by = c$ gebildete Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{llll} ax = by + c & & x = ey + p \\ a_1 y = ap - c & & y = e_1 p + q \\ a_2 p = a_1 q + c & & p = e_2 q + r \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{array}$$

beruht auf der Kette von Gleichungen

$$\begin{array}{l} b = ae + a_1 \\ a = a_1 e_1 + a_2 \\ a_1 = a_2 e_2 + a_3 \\ \ldots\ldots \end{array}$$

durch welche der Bruch $a : b$ in einen Kettenbruch so entwickelt wird, daß die Zähler der Glieder positive oder negative Einheiten sind. Ist nun z. B. a_3 eine Einheit, so kann man $r = 0$ wählen und erhält die besondern Werthe q', p', y', x' für q, p, y, x von der Art, daß

$$\frac{q'}{p'} = \frac{1}{e_2}, \quad \frac{p'}{y'} = \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2}, \quad \frac{y'}{x'} = \frac{1}{e} \dot{+} \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2}$$

Daher ist der letzte Näherungsbruch $\frac{\lambda}{\mu}$ für den Kettenbruch

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{e} \dot{+} \frac{1}{e_1} \dot{+} \frac{1}{e_2} \dot{+} \frac{1}{a_2}$$

ein besonderer Werth von $\frac{y}{x}$. In der That hat man unter dieser Voraussetzung (Allgem. Arithm. §. 30, 4)

$$a\mu - \lambda b = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 1$$
$$a \,.\, \varepsilon c\mu - b \,.\, \varepsilon c\lambda = c$$

Also genügen der gegebenen Gleichung die Werthe*)

$$x = \varepsilon c\mu + bz, \quad y = \varepsilon c\lambda + az$$

Wenn a prim zu b, und wenn es s Zahlen giebt, welche kleiner als b und prim zu b sind, so ist $a^s - 1$ durch b theilbar (Allgem. Arithm. §. 13, 21). Nun ist identisch

$$aa^{s-1} - b\frac{a^s - 1}{b} = 1$$

$$aca^{s-1} - bc\frac{a^s - 1}{b} = c$$

folglich $ax - by = c$, wenn überhaupt

$$x = ca^{s-1} + bz, \quad y = c\frac{a^s - 1}{b} + az$$

5. Das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} au &= b + cx \\ a_1u &= b_1 + c_1y \\ a_2u &= b_2 + c_2z \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ist in ganzen Zahlen nur dann auflösbar, wenn a und c, a_1 und c_1, a_2 und c_2, . . prim zu einander sind. Wenn die Zahl u dem gegebenen System genügt, und wenn d den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus der Zahlen $c, c_1, c_2, \ldots$ bedeutet, und v eine willkürliche Zahl, so genügt auch $u + dv$ demselben System. Denn nach der Voraussetzung ist $au - b$ durch c theilbar, $a_1u - b_1$ durch c_1 theilbar, u. s. w. Also ist auch $au + adv - b$ durch c theilbar, $a_1u_1 + a_1dv - b_1$ durch c_1 theilbar, u. s. w.

Aus der ersten Gleichung findet man $v = \alpha + cp$. Durch diese Substitution erhält man die zweite Gleichung

$$ca_1p = b_1 - \alpha a_1 + c_1y$$

$$p = \beta + \frac{c_1}{\delta_1}q, \qquad u = \alpha_1 + c\frac{c_1}{\delta_1}q$$

wenn δ_1 der größte gemeinschaftliche Divisor von c und c_1 ist. Durch diese Substitution erhält man die dritte Gleichung

*) Die Auflösung der Gleichung $ax \pm by = c$ in ganzen Zahlen, die elementarste unter den Diophantischen Aufgaben, ist in den übrig gebliebenen Schrif[ten] Diophants nicht anzutreffen, sondern im Occident zuerst von Bachet (problêr[es] plaisans 1624) gegeben worden. Mit Bachet's Auflösung fällt in der Hauptsa[che] Euler's Auflösung zusammen (Comm. Petrop. 7 p. 46), welche oben (3) mit[ge]theilt ist und die Vorzüge der Einfachheit und Kürze in sich vereint. Die Darstell[ung] der Auflösung durch Kettenbrüche (4) hat Lagrange (Mém. de Berlin 1767 p. 1[...]) gelehrt. Vergl. die franz. Ausgabe von Euler's Algebra, Lyon 1795, und Ga[uß] Disq. arithm. 27 ff. Die Anwendung des Fermat'schen Satzes ist von Bi[net] erdacht (J. de l'école polyt. Cah. 20 p. 289).

$$c\frac{c_1}{\delta_1}a_2q = b_2 - \alpha_1 a_2 + c_2 z$$

$$q = \beta_1 + \frac{c_2}{\delta_2}r, \qquad u = \alpha_2 + c\frac{c_1}{\delta_1}\frac{c_2}{\delta_2}r$$

wenn δ_2 der größte gemeinschaftliche Divisor von $c\frac{c_1}{\delta_1}$ und c_2 ist. U. s. w.

Beispiel 1. Die Zahl u soll so bestimmt werden, daß $121u$ nach dem Modul 504 den Rest 41, $9u$ nach dem Modul 35 den Rest -1, $27u$ nach dem Modul 16 den Rest 11 giebt.

Nun ist $504 = 8.9.7$, $35 = 7.5$; also soll $121u - 41$ durch 8, 9, 7, ferner $9u + 1$ durch 7, 5, endlich $27u - 11$ durch 16 theilbar sein. Diese Forderungen reduciren sich auf folgende:

$u - 1$ soll durch 8, $u + 1$ durch 9, $2u + 1$ durch 7 theilbar sein;
$2u + 1$ soll durch 7, $u - 1$ durch 5 theilbar sein;
$u - 1$ soll durch 16 theilbar sein.

Da nun u der Aufgabe genügt, wenn $u - 1$ durch 80, $u + 1$ durch 9, $2u + 1$ durch 7 theilbar ist, so setze man

$$\begin{aligned} u &= 1 + 80x \\ u &= -1 + 9y \\ 2u &= -1 + 7z. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen braucht nicht erst aufgelöst zu werden, und man hat sogleich

$$9y = 2 + 80x \qquad y = 9x - \frac{x-2}{9}$$

$$x = 2 + 9p \qquad u = 161 + 720p$$

Diese Substitution giebt

$$7z = 323 + 1440p \qquad z = \ldots - \frac{2p-1}{7}$$

$$2p = 1 + 7q \qquad p = 3q + \frac{q+1}{2}$$

$$q = -1 + 2r$$

Wenn $r = 0$, so ist $q = -1$, $p = -3$, $u = -1999$; also überhaupt $u = -1999 + 5040p$.

Beispiel 2. Damit die Zahl u nach dem Modul 9 den Rest 5 oder -4, nach dem Modul 10 den Rest 9 oder -1 giebt, und durch 11 theilbar ist, setze man

$$\begin{aligned} u &= -4 + 9x \\ u &= -1 + 10x \\ u &= 11z. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$9x = 3 + 10y, \quad x = y + \frac{y+3}{9}$$

$$y = -3 + 9p$$

Wenn $p = 0$, so ist $y = -3$, $u = -31$; also überhaupt

$$u = -31 + 90p.$$

Diese Substitution giebt

$$11z = -31 + 90p, \quad z = \ldots + 2\frac{p+1}{11}$$

$$p = -1 + 11q$$

Wenn $q = 0$, so ist $p = -1$, $u = -121$, also überhaupt

$$u = -121 + 990q$$

6. Um ein System von m linearen Gleichungen mit $m + 1$ Unbekannten in ganzen Zahlen aufzulösen, hat man nach Elimination von $m - 1$ Unbekannten eine Gleichung mit 2 Unbekannten abzuleiten. Die durch Auflösung dieser Gleichung gefundenen Werthe der beiden Unbekannten werden in eine der abgeleiteten Gleichungen substituirt, welche außer jenen beiden Unbekannten eine andere Unbekannte enthält. Die durch Auflösung dieser Gleichung gefundenen Werthe der drei Unbekannten werden wiederum substituirt. U. s. w.

Beispiel 1 Aus den Gleichungen

$$3x + 5y + 7z = 560$$
$$9x + 25y + 49z = 2920$$

ergiebt sich durch Elimination von z

$$5y = 500 - 6x, \quad y = 100 - x - \frac{x}{5}$$

$$x = 5p, \quad y = 100 - 6p.$$

Durch diese Substitution erhält man aus der ersten gegebenen Gleichung

$$7z = 15(4 + p), \quad z = 15\frac{p+4}{7}$$

$$p = -4 + 7q$$

folglich genügen dem gegebenen System

$$x = -20 + 35q, \quad y = 124 - 42q, \quad z = 15q$$

mit positiven Werthen, wenn $q = 1, 2$.

Beispiel 2. Aus den Gleichungen

$$4u + 13x + 5y - 2z = 2559$$
$$-5u + 8x + 7y + 3z = 1595$$
$$-7u + 11x - 3y + 5z = 2157$$

findet man die abgeleiteten Gleichungen

$$\begin{array}{r} 97x + 53y + 2z = 19175 \\ 135x + 23y + 6z = 26541 \\ \hline 39x + 34y \quad = 7746 \end{array}$$

Die letzte Gleichung giebt durch die Substitution $x = 2p$, $y = 3q$

$$13p = 1291 - 17q, \quad p = 99 - q - 4\frac{q-1}{13}$$
$$q = 1 + 13r$$

Bei $r = 0$ ist $q = 1$, $p = 98$, also überhaupt

$$x = 196 - 34r, \quad y = 3 + 39r$$

Durch diese Substitution erhält man aus der ersten abgeleiteten Gleichung

$$2z = 4 + 1231r, \quad r = 2s$$

folglich

$$x = 196 - 68s, \quad y = 3 + 78s, \quad z = 2 + 1231s$$

Durch diese Substitution giebt die erste gegebene Gleichung

$$4u - 2956s = 0, \quad u = 739s$$

Das gegebene System hat positive Auflösungen bei $s = 1, 2$.

7. Eine lineare Gleichung mit m Unbekannten ist in ganzen Zahlen auflösbar, wenn die Coefficienten der Unbekannten prim zu einander sind. Die Werthe der Unbekannten werden mit Hülfe von $m - 1$ Unbestimmten dargestellt.

Beispiel 1. $5x + 7y + 8z = 50$.

$$5x = 50 - 7y - 8z, \quad x = 10 - y - z - \frac{2y + 3z}{5}$$

$$2y = -3z + 5p, \quad y = -z + 2p - \frac{z - p}{2}$$

$$z = p + 2q, \quad y = p - 3q, \quad x = 10 - 3p + q.$$

Wenn x, y, z positiv sind, so sind $x + 3z = 10 + 7q$ und $x + 3y = 10 - 8q$ positiv, q liegt zwischen $-\frac{10}{7}$ und $+\frac{10}{8}$ und hat die Werthe $-1, 0, 1$. Bei $q = 1$, $p > 3$ wird x negativ. Also findet man positive Auflösungen der gegebenen Gleichung bei

$$q = -1 \quad p = 0$$
$$q = 0 \quad p = 1, 2, 3$$

Beispiel 2. $15x + 6y + 20z = 171$.

$$6y = 171 - 15x - 10z, \quad y = 28 - 2x - 3z - \frac{3x + 2z - 3}{6}$$

$$2z = 3 - 3x + 6p \quad z = 3\left(p - \frac{x-1}{2}\right)$$

$$x = 1 + 2q, \quad z = 3p - 3q, \quad y = 26 + 5q - 10p.$$

Die gegebene Gleichung hat positive Auflösungen, wenn $x = 1 + 2q$ und $y + \frac{10}{3}z = 26 - 5q$ positiv sind, also q zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{26}{5}$ liegt und die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5 hat. Bei $q > 3$ wird z oder y negativ. Also findet man positive Auflösungen bei

q	0	0	1	1	2	3
p	1	2	2	3	3	4

8. Um ganze x zu finden, welchen ganze Werthe der gebrochnen Function

$$y = \frac{cx^2 + dx + e}{ax + b}$$

entsprechen, entwickelt man

$$a^2y = \frac{a^2cx^2 + a^2dx + a^2e}{ax + b} = acx + ad - bc + \frac{a^2e + b^2c - abd}{ax + b}$$

so daß

$$(a^2y - acx - ad + bc)(ax + b) = a^2e + b^2c - abd.$$

Ist nun $a^2e + b^2c - abd$ durch Zahlen der Form $ax + b$ theilbar, so ist sie auch durch Zahlen der Form $a^2y - acx - ad + bc$ theilbar. Man hat demnach unter den Divisoren von $a^2e + b^2c - abd$ diejenigen auszusuchen, welche die Form $ax + b$ haben, oder unter den Zahlen der Form $ax + b$ diejenigen, welche in $a^2e + b^2c - abd$ aufgehn.

Beispiel 1. $y = \frac{-x^2 + 2x + 29}{x - 3}$

Man findet nach der Division $(y + x + 1)(x - 3) = 26$, folglich

$x - 3$	1	2	13	16	-1	-2	-13	-26
$y + x + 1$	26	13	2	1	-26	-13	-2	-1

x	4	5	16	29	2	1	-10	-23
y	21	7	-15	-29	-29	-15	7	21

Beispiel 2. $y = \frac{2x + 18}{5x - 3}$

giebt $(5y - 2)(5x - 3) = 96$, folglich

$5x - 3$	2	12	32	-3	-8	-48
$5y - 2$	48	8	3	-32	-12	-2

x	1	3	7	0	-1	-9
y	10	2	1	-6	-2	0

Beispiel 3. $y = \frac{3x^2 + 1}{2x + 1}$

giebt $(4y - 6x + 3)(2x + 1) = 7$, folglich

$2x + 1$	1	7	-1	-7
$4y - 6x + 3$	7	1	-7	-1
x	0	3	-1	-4
y	1	4	-4	-7

9. Um die Gleichung*) $x^2 + y^2 = z^2$ in ganzen Zahlen aufzulösen, setze man

$$t^2 + u^2 = (t + v)^2$$

wodurch man

$$t = \frac{u^2 - v^2}{2v}, \quad t + v = \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

findet. Demnach sind bei rationalen u und v

$$\frac{u^2 - v^2}{2v}, \quad u, \quad \frac{u^2 + v^2}{2v}$$

rationale Werthe von x, y, z, welche der gegebenen Gleichung genügen. Diese Werthe genügen der gegebenen Gleichung auch dann, wenn man sie mit $2v$ multiplicirt hat; also sind bei ganzen u und v

$$u^2 - v^2, \quad 2uv, \quad u^2 + v^2$$

ganze Zahlen, welche der gegebenen Gleichung genügen.

Haben u und v den gemeinschaftlichen Divisor m, so haben $u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$ den gemeinschaftlichen Divisor m^2.

Sind u und v ungerade, so sind u^2 und v^2 ungerade, $u^2 + v^2$ gerade und $u^2 - v^2$ durch 8 theilbar, folglich die Werthe von x, y, z durch 2 theilbar.

Um also Werthe von x, y, z zu erhalten, welche einen gemeinschaftlichen Divisor nicht haben, wählt man für u und v Werthe, welche prim zu einander und nicht beide ungerade sind; z. B.

v	1	1	1	..	2	2	2	..	3	3	3	..
u	2	4	6	..	3	5	7	..	4	8	10	..
x	3	15	35	..	5	21	45	..	7	55	91	..
y	4	8	12	..	12	20	28	..	24	48	60	..
z	5	17	37	..	13	29	53	..	25	73	109	..

*) Die Pythagoreische Gleichung, deren Auflösung Eucl. X, 29. Lemma 1 angegeben ist. Daß die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ in ganzen Zahlen nicht auflösbar sei, daß also die Summe von zwei $n$ten Potenzen eine $n$te Potenz nicht sein könne, hat Fermat bemerkt (Observ. ad Dioph. Arithm. II, 8). Ein allgemeiner Beweis dieser Bemerkung ist zur Zeit nicht bekannt.

Wie man auch u und v wählen mag, so ist eine der Zahlen x, y durch 3, eine derselben durch 4, ferner eine der Zahlen x, y, z durch 5 theilbar, mithin das Product xyz durch 60 theilbar*).

Beweis. Nach dem Modul 3 congruiren die Zahlen mit einer der Zahlen 0, ± 1, und die Quadrate mit 0, 1. Ist nun weder u noch v durch 3 theilbar, so ist $u^2 - v^2$ durch 3 theilbar.

Wenn u oder v gerade ist, so ist $2uv$ durch 4 theilbar. Wenn u und v beide ungerade sind, so sind x, y, z durch 2 theilbar, und $\frac{1}{2}x$ durch 4 theilbar.

Nach dem Modul 5 congruiren die Zahlen mit einer der Zahlen 0, ± 1, ± 2, und die Quadrate mit 0, 1, -1. Ist nun weder u noch v durch 5 theilbar, so ist entweder $u^2 - v^2$ oder $u^2 + v^2$ durch 5 theilbar.

10. Die Formel $a + bx + cx^2$ kann bei rationalen Werthen von x nicht unbedingt ein Quadrat werden**). Wenn aber insbesondere a oder c ein Quadrat ist, oder wenn die Formel als ein Product pq, oder als ein Binomium $p^2 + qr$ darstellbar ist, wobei p, q, r Functionen von x ersten Grades bedeuten, so findet man geeignete rationale Werthe von x auf folgendem Wege.

Wenn $a = \alpha^2$, so setze man $\alpha^2 + bx + cx^2 = (\alpha + ux)^2$, folglich

$$x = \frac{2\alpha u - b}{c - u^2} \qquad \alpha + ux = \frac{\alpha(c + u^2) - bu}{c - u^2}$$

Wenn $c = \gamma^2$, so setze man $a + bx + \gamma^2 x^2 = (u + \gamma x)^2$, folglich

$$x = \frac{a - u^2}{2\gamma u - b} \qquad u + \gamma x = \frac{\gamma(a + u^2) - bu}{2\gamma u - b}$$

Wenn $b^2 - 4ac$ ein Quadrat ist, so kann $a + bx + cx^2$ als Differenz von 2 Quadraten, mithin als Product von 2 Functionen von x ersten Grades dargestellt werden. Setzt man nun

$$(f + gx)(m + nx) = u^2(f + gx)^2$$

so wird

$$x = \frac{fu^2 - m}{n - gu^2} \qquad u(f + gx) = \frac{(fn - gm)u}{n - gu^2}$$

*) Frénicle sur les triangles rectangles en nombres 1676 prop. 26—30 (Anc. Mém. de Paris t. V). Gerg. Ann. 20 p. 212. Crelle J. 5 p. 386.
**) Vergl. Euler Introd. I §. 50 und Algebra II, 2.

Wenn $a + bx + cx^2 = p^2 + qr$, worin p, q, r Functionen von x ersten Grades bedeuten, so setze man

$$p^2 + qr = (p + qu)^2$$

und berechne x aus der Gleichung ersten Grades

$$r = 2pu + qu^2$$

11. Die transscendente Gleichung $x^y = y^x$ kann nach Euler (Introd. II. §. 519) dadurch reducirt werden, daß man $y = ux$ setzt. Durch diese Substitution erhält man die Gleichung $(x^u)^x = (ux)^x$, welche in realen Zahlen $x^u = ux$, $x^{u-1} = u$ giebt. Folglich genügen

$$x = u^{\frac{1}{u-1}}, \quad y = uu^{\frac{1}{u-1}}$$

der gegebenen Gleichung. Um dieselbe in rationalen Zahlen aufzulösen, setzt man $u - 1 = \frac{1}{v}$, und erhält

$$x = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v \qquad y = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1}$$

v	1	2	3	...
x	2	$(\frac{3}{2})^2$	$(\frac{4}{3})^3$	...
y	4	$(\frac{3}{2})^3$	$(\frac{4}{3})^4$	...

§. 10. Lehrsätze von den algebraischen Functionen.

1. Wenn der Werth $f(x)$ einer gegebenen ganzen Function $n$ten Grades dem Werth x der Variablen entspricht, so ist die Differenz $f(x) - f(t)$ durch die entsprechende Differenz $x - t$ theilbar. Der Quotient ist eine ganze Function $(n - 1)$ten Grades *).

Beweis. Aus den Werthen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

findet man durch Subtraction

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = a_n \frac{x^n - t^n}{x - t} + a_{n-1} \frac{x^{n-1} - t^{n-1}}{x - t} + \ldots$$

Nun ist $x^k - t^k$ durch $x - t$ theilbar (Allgem. Arithm. §. 12, 5), folglich u. s. w. Der Quotient

*) Diese Erweiterung des Satzes von der Theilbarkeit der Differenz $x^k - t^k$ durch $x - t$ kommt im Anfang des 17ten Jahrh. vor. Descartes Géom. III.

$$\frac{f(x)-f(t)}{x-t} = \begin{array}{l|l|l} a_n x^{n-1} + a_n t & x^{n-2} + a_n t^2 & x^{n-3} + \,.\,. \\ \quad\quad + a_{n-1} & \quad + a_{n-1} t & \quad + \,.\,. \\ & \quad + a_{n-2} & \quad + \,.\,. \\ & & \quad + \,.\,. \end{array}$$

ist eine symmetrische ganze Function von x und t (§. 2, 11), und wird entweder nach steigenden Potenzen von t geordnet

$$\begin{aligned} & a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \,.\,. + a_2 x + a_1 \\ & + (a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \,.\,. + a_3 x + a_2) t \\ & + (a_n x^{n-3} + a_{n-1} x^{n-4} + \,.\,. + a_4 x + a_3) t^2 + \,.\,. \end{aligned}$$

oder nach fallenden Potenzen von x

$$b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \,.\,. + b_1 x + b_0$$

wobei die successive Berechnung der Coefficienten

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= a_{n-1} + b_{n-1} t \\ b_{n-3} &= a_{n-2} + b_{n-2} t \end{aligned}$$

u. s. w. am bequemsten ist. Aus der Identität

$$f(x) = (b_{n-1} x^{n-1} + \,.\,.)(x - t) + f(t)$$

erkennt man bei $x = 0$, daß $f(t) = a_0 + b_0 t$.

Beispiele. Wenn $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, so hat man

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} &= a(x^3 + x^2 t + xt^2 + t^3) + b(x^2 + xt + t^2) \\ &\quad + c(x + t) + d \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d + (ax^2 + bx + c)t \\ &\quad + (ax + b)t^2 + at^3. \end{aligned}$$

Wenn $f(x) = 6x^6 - 19x^5 + 13x^4 - 20x^3 + 48x^2 - 16$, so ist $f(x) - f(4)$ durch $x - 4$ theilbar. Der Quotient wird, weil $b_5 = 6$, $b_4 = -19 + 6 . 4$ u. s. w., nach folgendem Schema berechnet:

6	− 19	13	− 20	48	0	− 16
	24	20	132	448	1984	7936
6	5	33	112	496	1984	7920

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 198$$

Zugleich findet man $f(4) = -16 + 1984 \,.\, 4$, und demnach

$$\frac{f(x)}{x-4} = 6x^5 + 5x^4 + 33x^3 + 112x^2 + 496x + 1984 + \frac{7920}{x-4}$$

2. Um die ganze Function $f(x)$ in der Nähe des Werthes $f(t)$ auszudrücken d. h. nach steigenden Potenzen von $x - t$ zu entwickeln, kann man $x = t + y$ setzen und die Glieder der Potenzen dieses Binomium (§. 23) ordnen. In jedem gegebenen Falle ist es einfacher, nach dem gezeigten Verfahren die Reihe der Quotienten

$$\frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f_1(x) \qquad \frac{f_1(x) - f_1(t)}{x - t} = f_2(x) \text{ u. s. w.}$$

zu berechnen, wodurch man erhält

$$f(x) = f(t) + (x - t)\, f_1(x), \quad f_1(x) = f_1(t) + (x - t)\, f_2(x) \text{ u. s. w.}$$

also

$$f(x) = f(t) + (x - t)\, f_1(t) + (x - t)^2\, f_2(x) \text{ u. s. w.}$$

Beispiel. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 12$ wird nach steigenden Potenzen von $x - 2$ entwickelt wie folgt.

1	-2	5	-3	12	
	2	0	10	14	
1	0	5	7	$26 = f(2)$,	$x^3 + 5x + 7 = f_1(x)$
	2	4	18		
1	2	9	$25 = f_1(2)$		$x^2 + 2x + 9 = f_2(x)$
	2	8			
1	4	$17 = f_2(2)$			$x + 4 = f_3(x)$
	2				
1	$6 = f_3(2)$				

$$f(x) = 26 + 25(x - 2) + 17(x - 2)^2 + 6(x - 2)^3 + (x - 2)^4$$

Anmerkung. Diese Entwickelung giebt zu erkennen, ob $f(x) - f(t)$ durch eine Potenz von $x - t$ theilbar ist. Wenn $f_1(t) = 0$ ist, so ist $f(x) - f(t)$ durch $(x - t)^2$ theilbar. Wenn $f_1(t)$, $f_2(t)$ null sind, so ist $f(x) - f(t)$ durch $(x - t)^3$ theilbar. U. s. w.

Indem man $f(x)$ $x^5 + 8x^4 + 21x^3 + 14x^2 - 20x - 24$ nach steigenden Potenzen von $x + 2$ entwickelt,

1	8	21	14	−20	−24
	−2	−12	−18	8	24
1	6	9	−4	−12	0
	−2	−8	−2	12	
1	4	1	−6	0	
	−2	−4	6		
1	2	−3	0		

erkennt man, daß $f(x) = (x + 2)^3 (x^2 + 2x - 3)$.

3. Wenn die Function *n*ten Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

bei $x = \alpha$ null ist, so ist sie bei beliebigen x durch eine Potenz von $x - \alpha$ theilbar (2). Wenn diese Potenz die λte ist, mithin $f(x)$ durch das Product von $(x - \alpha)^\lambda$ und einer ganzen Function $g(x)$ darstellbar ist, so sagt man von $f(x)$, daß sie bei $x = \alpha$ λfach null ist, und α heißt eine λfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Wenn ferner $f(x)$ bei $x = \beta$ μfach null ist, so muß $g(x)$ bei $x = \beta$ μfach null sein, mithin durch $(x - \beta)^\mu$ theilbar sein. Also ist $f(x)$ durch das Product $(x - \alpha)^\lambda (x - \beta)^\mu$ mit einer ganzen Function $h(x)$ darstellbar. U. s. w.

Wenn die Function *n*ten Grades bei *n* gegebenen Werthen der Variablen null ist, λfach bei $x = \alpha$, μfach bei $x = \beta$, . ., so ist sie durch das Product der *n* Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, . . theilbar. Als Quotienten der Division findet man den höchsten Coefficienten a_n der Function.

Wenn die Function *n*ten Grades bei mehr als *n* gegebenen Werthen der Variablen null ist, so sind ihre Coefficienten null, die Function ist identisch null d. h. bei beliebigen x*). Denn unter den Factoren des Products $f(x) = a_n (x - \alpha)^\lambda (x - \beta)^\mu \ldots$ sind nach der Voraussetzung nicht null der zweite und die folgenden; also ist $a_n = 0$ die nothwendige Bedingung, unter der die Function bei einem von $\alpha, \beta, \ldots$ verschiedenen Werth der Variablen null ist. Nun ist die Function $(n - 1)$ten Grades $a_{n-1} x^{n-1} + \ldots$ bei mehr als $n - 1$ gegebenen Werthen der Variablen null, also ist $a_{n-1} = 0$. U. s. w.

Demnach wird eine Function *n*ten Grades durch *n* Werthe der Variablen, bei denen sie null ist, bestimmt bis auf den höchsten Coefficienten a_n d. h. sie ist durch das Product von *n* bestimmten Functionen ersten Grades, die nicht alle von einander verschieden zu sein brauchen,

*) Cauchy Anal. algébr. c. IV, 1. Eine Anwendung dieses Satzes ist Allg. Arithm. §. 32, 2 gegeben worden.

mit einem von der Variablen unabhängigen beliebigen Factor a_n auf nicht mehr als eine Art darstellbar.

Die nicht identische Gleichung *n*ten Grades $f(x) = 0$ hat nicht mehr als *n* Wurzeln. Daß sie wirklich soviel Wurzeln hat, war schwieriger zu erkennen. S. unten (15).

Anmerkung. Wenn die Coefficienten a_n, a_{n-1}, .. real, t und t' conjugirt complex sind, so sind $f(t)$ und $f(t')$ conjugirt complex, und mit $f(t)$ ist zugleich $f(t')$ null. Dann ist $(x - t)(x - t')$, die Norm von $x - t$ (Allg. Arithm. §. 16, 7), ein realer Divisor zweiten Grades von $f(x)$.

4. Aus der Identität (3)

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1) \,..\, (x - \alpha_n) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \,..$$

erkennt man, daß die Gleichung $f(x) = 0$ die Wurzeln $\alpha_1, .., \alpha_n$ hat, und daß 1 und die Summen der Producte von je 1, 2, 3, .. unter den mit -1 multiplicirten Wurzeln zu einander der Reihe nach sich verhalten, wie die Coefficienten a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..*).

Beweis. Das Product $(x - \alpha_1) \,..\, (x - a_n)$ giebt

$$x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \,..\, + C_n$$

wenn durch C_k die Summe der Producte von je k unter den Größen $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, .. bezeichnet wird (Allg. Arithm. §. 27, 1). Also hat man $a_n C_k = a_{n-k}$ in Folge der Identität (§. 4, 1), mithin

$$1 : C_1 : C_2 : \,..\, = a_n : a_{n-1} : a_{n-2} : \,...$$

Beispiel. Bezeichnet man eine eigentliche *n*te Wurzel von 1 durch ϱ, so sind ϱ^2, ϱ^3, .., ϱ^n die übrigen *n*ten Wurzeln von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9). Daher hat man

$$x^n - 1 = (x - \varrho)(x - \varrho^2) \,..\, (x - \varrho^n)$$
$$\varrho + \varrho^2 + \,..\, + \varrho^n = 0, \quad (-1)^n \varrho\varrho^2 \,..\, \varrho^n = -1.$$

Die Summe der *n*ten Wurzeln von 1 ist 0, ihr Product $(-1)^{n-1}$.

Die durch die Coefficienten a_n, a_{n-1}, .. rational ausdrückbaren Größen C_1, C_2, .. sind symmetrische Functionen der Größen $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, .. (§. 2, 11). Man hat bemerkt, daß jede symmetrische ganze Function derselben Größen durch jene Coefficienten rational ausgedrückt werden kann; insbesondere wurde die Summe ihrer *k*ten Potenzen recursiv angegeben von Newton Arith. univ. p. 192 ed. Lugd. Vergl. Euler Opusc. var. arg. II p. 108, Mém. de Berlin 1748 p. 234, und anderwärts. Independente Ausdrücke für die Summe der 2ten, 3ten, 4ten Potenzen kommen früher vor bei Girard 1629 (Klügel math. W. I p. 56).

*) Dieser Satz ist in den einfachsten Fällen von Cardano, umfassender von Vieta am Ende der Schrift de emendatione aequationum angemerkt worden.



5. Die Function $x^n - 1$ ist null bei $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$ (Allg. Arithm. §. 31, 12), wenn m eine gerade Zahl ist. Dieser Werth ist $n$deutig, also hat die gegebene Function n verschiedene Divisoren ersten Grades (3), die aus $x - e^{i\frac{m\pi}{n}}$ entspringen, wenn man $m = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ setzt. Nun ist

$$\left(x - e^{i\frac{m\pi}{n}}\right)\left(x = e^{-i\frac{m\pi}{n}}\right) = x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$$

folglich hat die gegebene Function Divisoren zweiten Grades, die aus $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$ entspringen, wenn man $m = 2, 4, 6, \ldots$ setzt. Zu diesen Divisoren kommt der Divisor ersten Grades $x - 1$ $(m = 0)$, und bei geradem n der Divisor ersten Grades $x + 1$ $(m = n)$.

Die Function $x^n + 1$ verschwindet bei $x = e^{i\frac{m\pi}{n}}$, wenn m eine ungerade Zahl ist. Ihre Divisoren zweiten Grades entspringen aus $x^2 - 2x\cos\frac{m\pi}{n} + 1$, wenn man $m = 1, 3, 5, \ldots$ setzt. Zu diesen kommt bei ungeradem n der Divisor $x + 1$ $(m = n)$.

Die Function $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$ hat die Divisoren $x^n - e^{i\alpha}$ und $x^n - e^{-i\alpha}$. Nun ist $x^n - e^{i\alpha}$ durch $x - e^{i\frac{\alpha+m\pi}{n}}$ theilbar, und $x - e^{-i\alpha}$ durch $x - e^{-i\frac{\alpha+m\pi}{n}}$ theilbar, wenn m eine gerade Zahl bedeutet. Die n verschiedenen Divisoren zweiten Grades der gegebenen Function entspringen aus $x^2 - 2x\cos\frac{\alpha + m\pi}{n} + 1$, wenn man $m = 0, 2, 4, \ldots$ setzt.

Die Formel $x^2 - 2x\cos\varphi + 1$ bedeutet das Quadrat der Seite eines Dreiecks, in welchem die beiden andern Seiten die Längen x und 1 haben und den Winkel einschließen, der dem Arcus φ entspricht. Daher können die quadratischen Divisoren der Functionen

$$x^n - 1, \quad x^n + 1, \quad x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$$

durch Theilung des Kreises oder eines Kreisbogens in n gleiche Theile construirt werden, und sie sind in der That zuerst geometrisch vor der Einführung der Potenzen mit imaginären Exponenten dargestellt worden, die Divisoren von $x^n - 1$ und von $x^n + 1$ durch Cotes (Harmonia mensurarum p. 114, Op. posth. 1722), die Divisoren von $x^{2n} - 2x^n\cos\alpha + 1$ durch Moivre 1730 (Misc. anal. p. 22).

6. Eine irreducible gebrochne Function (§. 2, 7) wird null, wer ihr Zähler null wird, und unendlich, wenn ihr Nenner null wirl sie wird also (3) durch die Werthe der Variablen, bei denen sie nu und bei denen sie unendlich ist, bestimmt bis auf einen von der Variabl unabhängigen Factor.

Wenn bei $x = \alpha$ der Nenner der gebrochnen Function λfach null, mithin die gebrochne Function λfach unendlich ist, so kann man von ihr einen bestimmten echtgebrochnen Partialbruch ablösen, dessen Nenner $(x - \alpha)^\lambda$ und dessen Zähler entweder von x unabhängig oder eine ganze Function von x ist, deren Grad den λten Grad nicht erreicht. Zu diesem Zweck entwickelt man (2) nach steigenden Potenzen von $x - \alpha$ den Zähler und den Nenner, und durch Division die ersten λ Glieder des Quotienten, welche den gesuchten Partialbruch bilden. Uebrig bleibt der Bruch, dessen Zähler der Rest, dessen Nenner der Divisor ist, und den man aufstellt, wenn die gegebene gebrochne Function in nicht mehr als 2 Partialbrüche zerlegt werden kann oder soll. Wenn der Rest nicht in Betracht kommt, so genügt die Entwickelung bis zur $(\lambda - 1)$ten Potenz. Z. B. die gebrochne Function

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)^3 (x + 1) x^2}$$

wird unendlich 3fach bei $x = -2$, 1fach bei $x = -1$, 2fach bei $x = 0$, und besteht deshalb aus 3 Partialbrüchen der Nenner $(x + 2)^3$, $x + 1$, x^2, ohne eine hinzutretende ganze Function, weil die gegebene Function echtgebrochen ist.

Die Entwickelungen nach steigenden Potenzen von $x + 2 = y$ geben

$$\frac{-3 + 2y}{y^3(-4 + 8y - 5y^2 \ldots)} = \frac{\frac{3}{4} + y + \frac{17}{16} y^2}{y^3} + \ldots$$

also den Partialbruch

$$\frac{\frac{17}{16} x^2 + \frac{21}{4} x + 9}{(x + 2)^3}$$

Von den Entwickelungen nach steigenden Potenzen von $x + 1 = y$ werden nur die ersten Glieder gebraucht. Der Partialbruch des Nenners $x + 1$ hat den Zähler

$$\frac{2x + 1}{(x + 2)^3 x^2} \text{ bei } x + 1 = 0, \text{ d. i. } -1.$$

Die Entwickelungen nach steigenden Potenzen von x geben

$$\frac{1 + 2x}{x^2(8 + 20x \ldots)} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{16} x}{x^2} + \ldots$$

also den Partialbruch

$$\frac{-\frac{1}{16} x + \frac{1}{8}}{x^2}$$

Partialbrüche anderer Nenner kann die gegebne gebrochne Function nicht enthalten, also hat man identisch

$$\frac{2x+1}{(x+2)^3(x+1)x^2} = \frac{\frac{17}{16}x^2+\frac{21}{4}x+9}{(x+2)^3} + \frac{-1}{x+1} + \frac{-\frac{1}{16}x+\frac{1}{8}}{x^2}$$

Die Zerlegung einer gebrochnen Function in Partialbrüche liegt der Integration rationaler Differentiale zu Grunde, welche Leibniz und Joh. Bernoulli gefunden haben (Acta Erud. 1702—3). Die Zähler der Partialbrüche werden linear bestimmt durch die Bedingungen, unter denen

$$\frac{a_2x^2+a_1x+a_0}{(x+2)^3} + \frac{b_0}{x+1} + \frac{c_1x+c_0}{x^2} - \frac{2x+1}{(x+2)^3(x+1)x^2} = 0$$

eine Identität ist d. h. gültig bei beliebigen x (§. 4, 1). Dieses von Euler Introd. I §. 39 angewandte Verfahren, welches auch bei andern berechtigten Entwickelungen Hülfe leistet und von Descartes bei dem Problem der Normalen (Géom. II) gebraucht worden war, hat den Namen „Methode der unbestimmten Coefficienten" erhalten. Allgemeine Formeln für die Zähler der Partialbrüche wurden durch Differentialrechnung gefunden von Euler Calc. diff. II §. 40 und Jacobi 1835 de fract. simpl. p. 9. Das obige Verfahren war durch Euler Acta Petrop. 1780 I p. 32 und die Bemerkungen von Berlin und Hill Crelle J. 3 p. 150 angezeigt.

7. Wenn die gebrochne Function bei einem complexen Werth der Variablen und bei dem conjugirten unendlich wird, so hat sie zwei conjugirt complexe Partialbrüche, deren Summe real ist und direct berechnet werden kann. Die gebrochne Function

$$\frac{f(x)}{(x^2+4x+5)^3g(x)} \quad \text{d. i.} \quad \frac{f(x)}{[(x+2)^2+1]^3g(x)}$$

welche bei $x = -2 \pm i$ 3fach unendlich ist, wird nach der Substitution $x+2=y$ durch

$$\frac{\varphi(y)}{(y^2+1)^3\chi(y)}$$

ausgedrückt, und der Nenner und der Zähler mit $\chi(-y)$ multiplicirt (Hill a. a. O.). Die ganze Function $\chi(y)\chi(-y)$ enthält nur gerade Potenzen von y, weil sie bei der Vertauschung von y mit $-y$ unverändert bleibt, und wird durch $\psi(y^2)$ ausgedrückt, während die Glieder von $\varphi(y)\chi(-y)$ in $yF(y^2)+G(y^2)$ sich vertheilen lassen. Daher besteht die gebrochne Function aus den Gliedern

$$\frac{F(y^2)}{(y^2+1)^3\psi(y^2)}y + \frac{G(y^2)}{(y^2+1)^3\psi(y^2)}$$

von denen man wie oben die Partialbrüche

$$\frac{a_5y^4+a_3y^2+a_1}{(y^2+1)^3}y + \frac{a_4y^4+a_2y^2+a_0}{(y^2+1)^3} = \frac{a_5y^5+a_4y^4+\ldots}{(y^2+1)^3}$$

ablösen kann.

Beispiel. $\frac{x^2 + 1}{(x^2 + 4x + 5)^3 (x^2 + 2)}$ wird $(x + 2 = y)$

$$\frac{y^2 - 4y + 5}{(y^2 + 1)^3 (y^2 - 4y + 6)} = \frac{-4y + (y^4 - 5y^2 + 30)}{(y^2 + 1)^3 (y^4 - 4y^2 + 36)}$$

und nach steigenden Potenzen von $y^2 + 1 = z$ entwickelt

$$-4y \frac{1}{z^3 (41 - 6z + z^2)} + \frac{36 - 7z + z^2}{z^3 (41 - 6z + z^2)}$$

Daher hat der Partialbruch des Nenners z^3 den Zähler

$$-4y\left(\frac{1}{41} + \frac{6}{41^2} z - \frac{5}{41^3} z^2\right) + \frac{36}{41} - \frac{71}{41^2} z - \frac{221}{41^3} z^2$$

eine Function 5ten Grades von x. Der Partialbruch des Nenners $x^2 + 2$ hat den Zähler

$$\frac{(x^2 + 1)(x^3 - 4x + 5)^3}{(x^4 - 6x^2 + 25)^3} \text{ bei } x^2 + 2 = 0, \text{ d. i. } \frac{-20x + 261}{41^3}$$

Anmerkung. Wenn die ganzen Functionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ gegeben sind, so existirt ein bestimmter Multiplicator M der Art, daß $f(x) - Mg(x)$ durch $h(x)$ theilbar ist. Aus der Bedingung

$$\frac{f(x) - Mg(x)}{h(x)} = \varphi(x), \quad \text{d. i.} \quad \frac{f(x)}{g(x)\,h(x)} - \frac{M}{h(x)} = \frac{\varphi(x)}{g(x)}$$

erkennt man, daß von der gebrochnen Function

$$\frac{f(x)}{g(x)\,h(x)}$$

der Partialbruch des Nenners $h(x)$ abzulösen ist. Der Zähler dieses (nach Umständen aus mehrern Partialbrüchen zusammenzusetzenden) Partialbruchs ist der gesuchte Multiplicator.

8. I. Wenn $g(x)$ und $h(x)$ ganze Functionen mit **ganzen** Coefficienten bedeuten, und wenn in der Function $g(x)\,h(x)$ alle Coefficienten durch die Primzahl p theilbar sind, so sind entweder in $g(x)$ oder in $h(x)$ alle Coefficienten durch p theilbar. Es sei

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + .., \qquad h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ..$$

Wenn p in $b_0, b_1, .., b_{i-1}$ aufgeht, aber nicht in b_i, wenn ferner p in $c_0, c_1, .., c_{k-1}$ aufgeht, aber nicht in c_k, also auch nicht in $b_i c_k$, so ist in $g(x)\,h(x)$ der Coefficient von x^{i+k}

$$.. + b_{i-1} c_{k+1} + b_i c_k + b_{i+1} c_{k-1} + ..$$

durch p nicht theilbar, gegen die Voraussetzung. Also sind entweder in $g(x)$ oder in $h(x)$ alle Coefficienten durch p theilbar.

II. Wenn $G(x)$ und $H(x)$ ganze Functionen bedeuten, in welchen die höchsten Coefficienten 1 und die übrigen Coefficienten rational sind, und wenn in der Function $G(x) H(x)$, deren höchster Coefficient 1 ist, die übrigen Coefficienten ganz sind, so sind in $G(x)$ und $H(x)$ die übrigen Coefficienten ganz *). Denn man kann $G(x)$ und $H(x)$, wenn in ihnen gebrochne Coefficienten vorkommen, durch den $q$ten und den $r$ten Theil ganzer Functionen $g(x)$ und $h(x)$ mit ganzen Coefficienten, also $G(x) H(x)$ durch $g(x) h(x) : qr$ ausdrücken. Diese Function hat nach der Voraussetzung ganze Coefficienten, d. h. jede in qr aufgehende Primzahl theilt in $g(x) h(x)$ alle Coefficienten, mithin (I) theilt sie entweder in $g(x)$ oder in $h(x)$ alle Coefficienten. Wenn man durch alle in qr aufgehenden Primzahlen successive entweder $g(x)$ oder $h(x)$ dividirt, so behält man endlich $G(x)$ und $H(x)$ mit ganzen Coefficienten.

III. Wenn die ganze Function $f(x)$ mit ganzen Coefficienten, deren höchster 1 ist, theilbar ist durch eine ganze Function mit dem höchsten Coefficienten 1, so sind in dieser die übrigen Coefficienten nicht gebrochen (II), sondern entweder ganz oder irrational. Insbesondere sind die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ entweder ganz oder irrational. In der That, wenn $a_{n-1}, a_{n-2}, ..$ ganz und r, s relative Primzahlen sind, so ist

$$\left(\frac{r}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + .. = \frac{1}{s^{n-1}}\left(\frac{r^n}{s} + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} s + ..\right)$$

nicht null, weil r^n prim zu s. Vergl. den besondern Fall Allg. Arithm. §. 18, 7.

Eine ganze Function mit ganzen Coefficienten, deren höchster a_n ist, wird durch das Product von a_n^{n-1} und einer ganzen Function mit ganzen Coefficienten, deren höchster 1 ist, ausgedrückt (§. 7, 1).

Wenn eine ganze Function mit ganzen Coefficienten durch eine Function derselben Art nicht theilbar ist, so ist sie irreducibel. Eine Gleichung mit ganzen Coefficienten ist irreducibel, wenn keine ihrer Wurzeln einer Gleichung derselben Art niedern Grades genügt. Vergl. Abel Crelle J. 4 p. 132.

9. I. Wenn die ganze Function $f(x)$ mit ganzen Coefficienten, deren höchster 1 ist, den gleichgearteten Divisor ersten Grades $x + a$ hat, so sind

$$.. \quad f(-1) \quad f(0) \quad f(1) \quad ..$$

der Reihe nach theilbar durch

$$.., \quad -1 + a, \quad a, \quad 1 + a, \quad ..$$

*) Gauß Disq. arithm. 42. Eisenstein Crelle J. 39 p. 168.

Und wenn eine dieser Divisionen nicht aufgeht, so ist $x + a$ kein Divisor der gegebenen Function (Newton's Regel, Arithm. univ. p. 37 ed. Lugd.).

Wenn $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + .. = (a + x)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ..)$ identisch ist, so hat man

$$c_0 = ab_0, \quad c_1 = ab_1 + b_0, \quad c_2 = ab_2 + b_1, \; ..$$

$$\frac{c_0}{a} = b_0 \qquad \frac{c_1 - b_0}{a} = b_1 \qquad \frac{c_2 - b_1}{a} = b_2 \; .. \; ,$$

und wenn eine dieser Divisionen nicht aufgeht, so ist $a + x$ kein Divisor von $c_0 + c_1 x + ..$ (Bezout's Regel, Elém. de algèbre).

Beispiel. $f(x) = x^5 - 34x^3 + 29x^2 + 212x - 300$

$$f(-1) = -450, \quad f(0) = -300, \quad f(1) = -92$$

Der Divisor $x + 3$ ist nicht unmöglich, weil 3 in -300, 2 in -450, 4 in -92 aufgeht. Auch findet man

$$\frac{-300}{3} = -100, \quad \frac{212 + 100}{3} = 104, \; ..$$

Die Division durch $x + 3$ giebt (1)

1	0	−34	29	212	−300
	−3	9	75	−312	300
1	−3	−25	104	−100	0

den Quotienten $x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 104x - 100$, bei welchem der Divisor $x - 2$ nicht unmöglich erscheint. Die Division giebt

1	−3	−25	104	−100
	2	−2	−54	100
1	−1	−27	50	0

den Quotienten $x^3 - x^2 - 27x + 50$, der denselben Divisor hat

1	−1	−27	50
	2	2	−50
1	1	−25	0

Also ist $f(x) = (x + 3)(x - 2)^2 (x^2 + x - 25)$.

II. Wenn $f(x)$ den Divisor 2ten Grades mit ganzen Coefficienten $x^2 + ax + b$ hat, so sind

$$.. \; f(-2) \quad f(-1) \quad f(0) \quad f(1) \quad f(2) \; ..$$

der Reihe nach durch die Glieder der arithmetischen Progression 2ter Ordnung

$$.., \; 4 - 2a + b, \quad 1 - a + b, \quad b, \quad 1 + a + b, \quad 4 + 2a + b, \; ..$$

theilbar. Man stelle je in eine Zeile die um 4 verminderten Divisoren von $f(-2)$, die um 1 verminderten Divisoren von $f(-1)$, die Divi-

soren von $f(0)$, die um 1 verminderten Divisoren von $f(1)$, die um 4 verminderten Divisoren von $f(2)$, u. s. w. Wenn es nicht eine arithmetische Progression erster Ordnung giebt, deren Glieder in folgenden Zeilen anzutreffen sind, so hat $f(x)$ keinen Divisor 2ten Grades mit ganzen Coefficienten.

Wenn $f(x, y)$ eine homogene ganze Function mit ganzen Coefficienten ist, und wenn z. B. $x^2 + ax + b$ in $f(x, 1)$ aufgeht, so geht $x^2 + axy + by^2$ in $f(x, y)$ auf. Wenn die homogene ganze Function $f(x, y, z)$ mit ganzen Coefficienten durch die Function derselben Art $g(x, y, z)$ theilbar ist, so sind $g(0, y, z)$, $g(x, 0, z)$, $g(x, y, 0)$ Divisoren von $f(0, y, z)$, $f(x, 0, z)$, $f(x, y, 0)$. Aus den Divisoren dieser letztern Functionen kann man die möglichen Formen von $g(x, y, z)$ erkennen. Newton a. a. O. Clairaut Élém. d'algèbre III.

10. Wenn $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-2} + .. + a_1 x + a_0$, so kann die Differenz $f(x + u) - f(x)$ der Function nach steigenden Potenzen der Differenz u der Variablen entwickelt werden (§. 2, 5). Nach dem Binomialtheorem (Allg. Arithm. §. 23) ist

$$(x - \alpha + u)^k = (x - \alpha)^k + k(x - \alpha)^{k-1} u + ..$$
$$a(x - \alpha + u)^k - a(x - \alpha)^k = ka(x - \alpha)^{k-1} u + ..$$

d. h. die Function $a(x - \alpha)^k$ hat den Differentialquotienten $ka(x - \alpha)^{k-1}$.

Durch Anwendung desselben Verfahrens auf alle Glieder der gegebenen ganzen Function findet man den Differentialquotienten von $f(x)$, der durch $f'(x)$ bezeichnet wird,

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} x^{n-2} + .. + 2a_2 x + a_1$$

eine Function $(n - 1)$ten Grades, ferner den Differentialquotienten von $f'(x)$, welcher der 2te Differentialquotient von $f(x)$ genannt und durch $f''(x)$ bezeichnet wird,

$$f''(x) = n(n - 1) a_n x^{n-2} + (n - 1)(n - 2) a_{n-1} x^{n-3} + .. + 2a_2$$

eine Function $(n - 2)$ten Grades und durch 2 theilbar. U. s. w. Der 3te Differentialquotient von $f(x)$ ist $(n - 3)$ten Grades und durch 3! theilbar, der $n$te ist $n! a_n$ unabhängig von x und durch $n!$ theilbar.

Wenn die Function $f(x)$ in der Nähe von $f(\alpha)$ durch eine Taylor'sche Reihe d. h. durch steigende Potenzen von $x - \alpha$ ausgedrückt werden kann (vergl. 2)

$$f(x) = C_0 + C_1(x - \alpha) + C_2(x - \alpha)^2 + C_3(x - \alpha)^3 + ..$$

so findet man auf demselben Wege

$$f'(x) = C_1 + 2C_2(x-\alpha) + 3C_3(x-\alpha)^2 + \ldots$$
$$f''(x) = 2C_2 + 2.3\,C_3(x-\alpha) + \ldots$$
$$f'''(x) = 2.3\,C_3 + \ldots$$

also $f(\alpha) = C_0$, $f'(\alpha) = C_1$, $f''(\alpha) = 2C_2$, $f'''(\alpha) = 2.3\,C_3$, u. s. w. folglich die Ausdrücke der Entwickelungscoefficienten*)

$$C_0 = f(\alpha),\quad C_1 = f'(\alpha),\quad C_2 = \frac{f''(\alpha)}{2},\quad C_3 = \frac{f'''(\alpha)}{3!}, \ldots$$

11. I. Wenn bei $x = \alpha$ die ganze Function $f(x)$ und ihre Differentialquotienten bis zum $(\lambda - 1)$ten null sind, während der λte nicht null ist, so sind bei beliebigen x die Function und ihre Differentialquotienten bis zum $(\lambda - 1)$ten durch Potenzen von $x - \alpha$ theilbar, die Function durch die λte Potenz, der 1te Differentialquotient durch die $(\lambda - 1)$te, der 2te durch die $(\lambda - 2)$te, . ., der $(\lambda - 1)$te durch die 1te, d. h. bei $x = \alpha$ ist die Function λfach null, der 1te Differentialquotient $(\lambda - 1)$fach, u. s. w. so daß α eine λfache Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ ist, eine $(\lambda - 1)$fache von $f'(x) = 0$, u. s. w.**). Dieß folgt unmittelbar aus der Taylor'schen Reihe, durch welche $f(x)$ ausgedrückt wird. Ebenso ergiebt sich (10) aus der Voraussetzung $f(x) = (x - \alpha)^\lambda \varphi(x)$

$$f(x+u) - f(x) = [(x-\alpha+u)^\lambda - (x-\alpha)^\lambda]\varphi(x+u) + (x-\alpha)^\lambda[\varphi(x+u) - \varphi(x)]$$
$$f'(x) = \lambda(x-\alpha)^{\lambda-1}\varphi(x) + (x-\alpha)^\lambda \varphi'(x)$$

mithin die Theilbarkeit von $f'(x)$ durch $(x - \alpha)^{\lambda-1}$ und die Zerlegung in Partialbrüche

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

II. Wenn bei den Werthen α, β, . . der Variablen die ganze Function mehrfach null ist, so ist auch der erste Differentialquotient null, also sind $f(x)$ und $f'(x)$ beide theilbar durch eine ganze Function von x mit Coefficienten, die im Allgemeinen irrational sind. Der größte gemeinschaftliche Divisor, welcher die ganze Function $f(x)$ mit rationalen Coefficienten und ihren Differentialquotienten $f'(x)$ theilt, ist eine ganze Function $g(x)$ mit rationalen Coefficienten (§. 2, 7). Wenn nun

---

*) Taylor Meth. incrementorum 1715 prop. 7. Vergl. Stirling Lineae 3[i] ordinis 1717 prop. 3 und Maclaurin Fluxions 1742 art. 751, welche auf Taylor Bezug nehmen.

**) Die Theorie der mehrfachen Wurzeln einer Gleichung war vor der Erfindung der Differentialrechnung von Hudde 1657 begründet worden. Epist. I, reg. 10 in Schooten's neuer Ausgabe von Descartes' Geometrie. Vergl. Euler Calc. diff. II[a] c. 9.

bei $x = \alpha, \beta, ..$ die $f(x)$ λfach, μfach, .. null ist, so ist $g(x)$ wi $f'(x)$ zugleich $(\lambda - 1)$fach, $(\mu - 1)$fach, .. null. Daher ist $f(x) : g(x)$ eine ganze Function (p) mit rationalen Coefficienten, welche einfach null ist, wenn $f(x)$ einfach oder mehrfach null ist.

Wenn ferner $h(x)$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $g(x)$ und $g'(x)$ ist, so ist $g(x) : h(x)$ eine ganze Function (q) mit rationalen Coefficienten, welche einfach null ist, wenn $f(x)$ zweifach oder mehrfach null ist. U. s. w.

Endlich ist $p : q$ eine ganze Function mit rationalen Coefficienten, welche einfach null ist, wenn $f(x)$ einfach null ist; $q : r$ eine ganze Function mit rationalen Coefficienten, welche einfach null ist, wenn $f(x)$ zweifach null ist; u. s. w.

$$f(x) = \frac{p}{q}\left(\frac{q}{r}\right)^2 \ldots$$

III. Daher ist eine ganze Function, welche bei einem Werthe der Variablen mehrfach null ist, reducibel. Wenn die ganze Function $f(x)$ und ihr Differentialquotient $f'(x)$ durch eine ganze Function nicht beide theilbar sind, so sind alle Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ von einander verschieden.

12. Wenn x im realen Gebiet steigt, so beginnt die ganze Function $f(x)$ zu steigen oder zu fallen, je nachdem ihr Differentialquotient $f'(x)$ positiv oder negativ ist. Wenn $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Zeichen haben, und $f'(x)$ das Zeichen nicht wechselt, während x den realen Weg von a bis b zurücklegt, so liegt auf diesem Weg ein und nicht mehr als ein Werth der Variablen, bei dem die Function null ist (§. 2, 5).

Ein realer Werth x der Variablen, welchem positive Werthe der ganzen Function $f(x)$ und aller ihrer Differentialquotienten entsprechen, ist eine obere Grenze der realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ (Newton Arithm. univ. p. 194 ed. Lugd.). Z. B.

$f(x)$	$x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 30x^2 + 63x - 120$
$f'(x)$	$5x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 60x + 63$
$\frac{1}{2}f''(x)$	$10x^3 - 12x^2 - 30x + 30$
$\frac{1}{6}f^{(3)}(x)$	$10x^2 - 8x - 10$
$\frac{1}{24}f^{(4)}(x)$	$5x - 2$

Bei $x = 1$ ist die letzte dieser Functionen positiv, aber nicht die vorhergehende. Bei $x = 2$ sind auch die vorhergehenden positiv nnd beginnen zu steigen, während x von 2 an steigt; mithin hat die Gleichung $f(x) = 0$ über der Grenze 2 keine reale Wurzel.

Eine untere Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ ist einer oberen Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $(-1)^5 f(-x) = 0$ entgegengesetzt gleich. Von den Functionen

$$x^5 + 2x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 63x + 120$$
$$5x^4 + 8x^3 - 30x^2 - 60x + 63$$
$$10x^3 + 12x^2 - 30x - 30$$
$$10x^2 + 8x - 30$$
$$5x + 2$$

sind bei $x = 1$ die 2 letzten, bei $x = 2$ die 3 letzten, bei $x = 3$ alle positiv; also ist -3 eine untere Grenze für die realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

13. Bei einer gegebenen Reihe von realen Zahlen bestimme man die Zeichen der Quotienten jeder folgenden Zahl durch die nächst vorhergehende. Wenn unter diesen Quotienten v negative sich befinden so sagt man, die gegebene Reihe hat v Wechsel (variations). Der ganzen Function $f(x)$ schreibt man ebensoviel Wechsel zu, als die Reihe ihrer Coefficienten hat.

I. Wenn α positiv ist, und wenn $(x - \alpha)f(x)$, $f(x)$, $(x + \alpha)f(x)$ der Reihe nach u, v, w Wechsel haben, so ist $u - v$ eine positive ungerade Zahl, $v - w$ null oder eine positive gerade Zahl.

Beweis. In $f(x) = a_n x^n + \ldots$ trete der erste Wechsel bei dem Coefficienten a_p ein, der zweite bei a_q, der letzte bei a_t, wobei $p, q, \ldots$ eine fallende Reihe bilden. Dann haben in $(x - \alpha)f(x)$ die Coefficienten von x^{p+1}, x^{q+1}, x^{t+1} der Reihe nach einerlei Zeichen mit a_p, a_q, a_t. Also findet man in $(x - \alpha)f(x)$ bis zu dem Coefficienten von x^{p+1} wenigstens 1 Wechsel, bis zu dem Coefficienten von x^{q+1} wenigstens 2, und bis zu dem Coefficienten von x^{t+1} wenigstens soviel Wechsel als $f(x)$ hat. Nach der Voraussetzung ist a_0 mit a_t von einerlei Zeichen, folglich giebt es in $(x - \alpha)f(x)$ bis zu dem Schlußglied $-\alpha a_0$ wenigstens einen Wechsel mehr als deren $f(x)$ hat.

Dagegen findet man in $(x + \alpha)f(x)$ bis zu dem Coefficienten von x^{p+1} höchstens 1 Wechsel, bis zu dem Coefficienten von x^{q+1} höchstens 2, und bis zu dem Coefficienten von x^{t+1} höchstens soviel Wechsel als deren $f(x)$ hat. Und nur in dem Falle, daß bei dem Coefficienten von x^{t+1} ein Wechsel nicht stattgefunden hat, tritt bis zu dem Schlußglied noch ein Wechsel ein.

Daher sind $u - v - 1$, $v - w$ nicht negativ. Wenn a_n und a_0 einerlei Zeichen haben, so sind v und w gerade, u ungerade; wenn a_n und a_0 verschiedene Zeichen haben, so sind v und w ungerade, u gerade. Also ist immer $u - v$ ungerade, $v - w$ gerade.

II. Wenn die Gleichung $f(x) = 0$ die positiven Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$

hat, so ist $f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_k)\varphi(x)$ und hat wenigstens k Wechsel (I). Umgekehrt:

Descartes' Regel*). Wenn es in $f(x)$ v Wechsel giebt, so kann die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr als v positive Wurzeln haben. Wenn es in $f(-x)$ v' Wechsel giebt, so kann die Gleichung $f(x) = 0$ nicht mehr als v' negative Wurzeln haben (positive Wurzeln von $f(-x) = 0$). Die Gleichung $f(x) = 0$ kann nicht mehr als $v + v'$ reale Wurzeln haben.

Z. B. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ hat 1 Wechsel, $f(-x)$ hat keinen Wechsel, also kann die Gleichung $f(x) = 0$ höchstens 1 positive und keine negative Wurzel haben. In der That ist die Discriminante der Gleichung $(-\frac{5}{2})^2 + 1^3 = 7\frac{1}{4}$ positiv.

III. Wenn unter den Coefficienten von $f(x)$ keiner null ist, so giebt es $n - v$ Nicht-Wechsel in $f(x)$, welchen die in $f(-x)$ vorhandenen Wechsel entsprechen; daher ist $v + v' = n$.

Wenn $2k$ folgende Coefficienten in $f(x)$ null sind, so enthält von den an der Lücke stehenden Gliedern das eine eine gerade Potenz von x, das andere eine ungerade Potenz, also giebt dieses Paar entweder in $f(x)$ oder in $f(-x)$ einen Wechsel. Anstatt dieses einen Wechsels erhält man in $f(x)$ und in $f(-x)$ zusammen $2k + 1$ Wechsel, wenn man die Lücke durch $2k$ Glieder mit willkürlichen Coefficienten ausfüllt. Demnach wird die Zahl $v + v'$ durch $2k$ zu n ergänzt, und man hat $v + v' = n - 2k$.

Wenn $2k + 1$ folgende Coefficienten in $f(x)$ null sind, so enthalten die an der Lücke stehenden Glieder Potenzen von x, die beide gerade oder beide ungerade sind, also giebt dieses Paar entweder sowohl in $f(x)$ als auch in $f(-x)$, oder in keiner von beiden einen Wechsel. Dafür erhält man in $f(x)$ und in $f(-x)$ zusammen $2k + 2$ Wechsel, wenn man die Lücke durch $2k + 1$ Glieder mit willkürlichen Coefficienten ausfüllt. Also wird die Zahl $v + v'$ durch $2k$ oder durch $2k + 2$ zu n ergänzt, je nachdem die an der Lücke stehenden Glieder verschiedene oder gleiche Zeichen besitzen, und man hat $v + v' = n - 2k$ in dem ersten Falle, $v + v' = n - 2k - 2$ in dem andern Falle.

14. Von der ganzen Function u der Variablen x und ihrem Differentialquotienten u_1 ausgehend bilde man durch successive Divisionen die endliche Kette (§. 2, 7)

*) Die Regel, deren Erfindung Harriot von Wallis, Leibniz u. A. zugeschrieben wird, welche jedoch in Harriot's Nachlaß vergeblich gesucht worden ist (Klügel math. W. I p. 50 ff. II p. 435), wurde von Descartes Géom. III ungenau und unbewiesen aufgestellt. Die Berichtigung, den Zusatz und den Beweis verdankt man Gauß (Crelle's J. 3 p. 1). Vergl. Choquet et Mayer Algèbre 392 ff.

$$\begin{array}{lll} u = u_1 p_1 + u_2 & \text{oder} & v = v_1 q_1 - v_2 \\ u_1 = u_2 p_2 + u_3 & & v_1 = v_2 q_2 - v_3 \\ u_2 = u_3 p_3 + u_4 & & v_2 = v_3 q_3 - v_4 \\ \dots & & \dots \end{array}$$

und zwar die letztere, indem man

$$\begin{array}{ccccccccc} u & u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 & u_5 & -u_6 & -u_7 & \dots \\ & p_1 & -p_2 & p_3 & -p_4 & p_5 & -p_6 & p_7 & \dots \end{array}$$

der Reihe nach durch

$$\begin{array}{cccc} v & v_1 & v_2 & v_3 \dots \\ & q_1 & q_2 & q_3 \dots \end{array}$$

bezeichnet. Die Reihe der Functionen $v, v_1, v_2, \dots, v^r$ heißt eine **Sturm'sche Reihe**, z. B.

$$x^3 - 2x - 4, \quad 3x^2 - 2, \quad x + 3, \quad -25$$

Wenn das Schlußglied v_r von x unabhängig ist, so haben v und v_1 keinen von x abhängigen gemeinschaftlichen Divisor. Wenn v_r in v_{r-1} aufgeht, so ist v_r der größte gemeinschaftliche Divisor von v und v_1. Bei einem gegebenen realen x hat die Sturm'sche Reihe eine bestimmte Menge Wechsel (13), welche nur dann sich ändert, wenn x einen Werth überschreitet, bei dem das Anfangsglied v null ist.

I. Wenn x den Werth δ durchläuft, bei welchem das Anfangsglied v nicht null und ein Mittelglied v_i null ist, so bleibt in der Sturm'schen Reihe die Menge der Wechsel unverändert.

Beweis. Unter der Bedingung $v_i(\delta) = 0$ ist zufolge der Kette $v_{i-1}(\delta) = -v_{i+1}(\delta)$ nicht null, sonst wäre auch $v(\delta) = 0$ gegen die Voraussetzung. Nach §. 2, 4 hat $\varphi(\delta + h)$ bei hinreichend kleinem h dasselbe Zeichen wie $\varphi(\delta)$. Sowohl bei $x = \delta - h$ als auch bei $x = \delta + h$ haben daher v_{i-1} und v_{i+1} verschiedene Zeichen, und in beiden Fällen hat die Sturm'sche Reihe dieselbe Menge Wechsel.

II. Wenn x **steigend** den Werth α überschreitet, bei welchem das Anfangsglied v null ist, so **verliert** die Sturm'sche Reihe einen Wechsel.

Beweis. Unter der Voraussetzung $v = (x - \alpha)^\lambda g(x)$ ist (11)

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\lambda}{x - \alpha} + \frac{g'(x)}{g(x)}$$

bei $x = \alpha - h$ negativ, bei $x = \alpha + h$ positiv, wenn h hinreichend klein. Daher beginnt die Sturm'sche Reihe bei $x = \alpha - h$ mit einem Wechsel, bei $x = \alpha + h$ mit einem Nicht-Wechsel.

III. Wenn x steigend k Werthe überschreitet, bei welchen das An-

fangsglied v null ist, so verliert die Sturm'sche Reihe k Wechsel. Umgekehrt:

Sturm'scher Satz*). Wenn die zu einer ganzen Function gehörende Sturm'sche Reihe bei einem gegebenen Werth der Variablen k Wechsel weniger hat, als bei einem gegebenen kleinern Werth derselben, so liegen zwischen den gegebenen Grenzen k verschiedene Werthe der Variablen, bei denen die Function (einfach oder mehrfach) null ist. Z. B. die Sturm'sche Reihe

$$x^3 - 2x - 4, \quad 3x^2 - 2, \quad x + 3, \quad -25$$

hat bei $x = -\infty, 0, +\infty$ bezüglich 2, 2, 1 Wechsel. Also hat die Gleichung $x^3 - 2x - 4 = 0$ nicht mehr als eine reale und zwar eine positive Wurzel, nämlich 2. In der That ist ihre Discriminante $4 - \frac{8}{27}$ positiv.

15. Die Puncte der (complexen) Werthe $\alpha, \beta, \gamma, ..$ der Variablen, bei denen die ganze Function $f(x)$ λfach, μfach, νfach, .. null ist, d. h. die Puncte der λfachen Wurzel α, der μfachen Wurzel β, u. s. w. der Gleichung $f(x) = 0$ werden durch $A, B, C, ..$ bezeichnet (Allg. Arithm. §. 16, 7. 31, 11). Wenn der (complexe) Werth x der Variablen so verändert wird, daß sein Punct M auf der Zahlenebene eine geschlossene Linie einmal durchläuft, so beschreibt der Punct N des entsprechenden Werthes $f(x)$ der Function eine Linie, welche ebenfalls geschlossen ist. Die von einer geschlossenen Linie, welche sich selbst nicht schneidet, begrenzte Fläche wird eine Zelle genannt (Planim. §. 9, 10). Der Perimeter der Zelle wird so durchlaufen, daß die Zelle auf dem linken Ufer des Perimeters liegt; und positive Winkel werden durch linksum gehende Drehung beschrieben. Wenn nun der Punct M den Perimeter einer Zelle einmal durchläuft, so beschreibt der Schenkel SM Winkel, deren Summe 0 oder 2π ist, je nachdem der Scheitel S außer der Zelle liegt oder in derselben. Ueberhaupt, wenn der Punct M eine beliebige geschlossene Linie einmal durchläuft, während der Punct S in einer ihrer Zellen ruht, welche den Coefficienten c hat, so beschreibt SM Winkel, deren Summe $2\pi c$ ist.

I. Wenn der Punct M den Perimeter einer Zelle durchläuft, welche keinen der Puncte $A, B, C, ..$ enthält, so beschreibt der Modul des entsprechenden Punctes N Winkel, deren Summe null ist.

Beweis. Die gegebene Zelle wird in hinreichend kleine Zellen zerlegt. Wenn M in hinreichender Nähe des Punctes von t den Peri-

*) Von Sturm 1829 der Pariser Academie mitgetheilt. Férussac Bulletin XI p. 419. Choquet et Mayer Algèbre 427 ff. Vergl. des Verf. Determinanten 3te Aufl. p. 163.

meter $FGHJF$ des diesen Punct enthaltenden Zellentheils einmal durchläuft, so durchläuft der Punct N in beliebiger Nähe des Punctes T von $f(t)$ eine geschlossene Linie l. Der Nullpunct O hat unter der Bedingung, daß $f(t)$ nicht null ist, eine endliche Entfernung von T, und wird deshalb von der Linie l ganz ausgeschlossen. Also beschreibt ON Winkel, deren Summe null ist.

Wenn M in hinreichender Nähe des Punctes von u den Perimeter $JHGKJ$ des diesen Punct enthaltenden Zellentheils durchläuft, und $f(u)$ nicht null ist, so beschreibt ON ebenfalls Winkel, deren Summe null ist. Wenn daher M die Perimeter $FGHJF$ und $JHGKJ$ d. i. $FGKJF$ und $JHGHJ$ durchläuft, wenn er also auch nur den Perimeter $FGKJF$ durchläuft, so beschreibt ON Winkel, deren Summe null ist. U. s. w.

II. Wenn der Punct M den Perimeter einer Zelle einmal durchläuft, welche den Punct A und keinen der übrigen B, C, .. enthält, so beschreibt ON Winkel, deren Summe $2\pi\lambda$ ist.

Beweis. Die gegebene Zelle wird in hinreichend kleine Zellen zerlegt, von welchen eine den Punct A enthält. Wenn M in hinreichender Nähe von A den Perimeter des diesen Punct enthaltenden Zellentheils einmal durchläuft, so beschreibt der Schenkel AM Winkel, deren Summe 2π ist, und N durchläuft in beliebiger Nähe von O eine geschlossene Linie. Nach der Voraussetzung ist $f(x) = (x - \alpha)^\lambda g(x)$ und durch $(x - \alpha)^\lambda g(\alpha)$ mit einem beliebig kleinen Fehler ausdrückbar. Der Winkel dieser Zahl übertrifft den Winkel von $g(\alpha)$ um den Winkel von $(x - \alpha)^\lambda$ d. i. um den λfachen Winkel von $x - \alpha$. Also beschreibt ON Winkel, welche λmal soviel betragen als die von AM beschriebenen, und deren Summe $2\pi\lambda$ ist.

Wenn M die Perimeter der übrigen Zellentheile durchläuft, so beschreibt ON Winkel, deren Summe null ist (I), folglich u. s. w.

III. Wenn der Punct M den Perimeter $FGHF$ einer Zelle einmal durchläuft, welche von den Puncten A, B, C, .. nur A enthält, so beschreibt ON Winkel, deren Summe $2\pi\lambda$ ist. Wenn M den Perimeter $HGJH$ einer Zelle einmal durchläuft, welche von jenen Puncten nur B enthält, so beschreibt ON Winkel, deren Summe $2\pi\mu$ ist. Wenn daher M die Perimeter $FGHF$ und $HGJH$ d. i. $FGJHF$ und GHG, oder nur den Perimeter $FGJHF$, dessen Zelle die Puncte A und B enthält, einmal durchläuft, so beschreibt ON Winkel, deren Summe $2\pi(\lambda + \mu)$ ist. U. s. w. Umgekehrt:

Cauchy's Satz*). Wenn auf der Zahlenebene der Punct M der Variablen x den Perimeter einer gegebenen Zelle einmal durchläuft, und der entsprechende Punct N der ganzen Function $f(x)$, ohne den Nullpunct O zu erreichen, sich so bewegt, daß der Schenkel ON Winkel beschreibt, deren Summe $2\pi k$ ist, so enthält die Zelle k (getrennte oder vereinte) Puncte der Variablen, bei welchen die Function null ist, d. h. k (verschiedene oder nicht verschiedene Puncte von) Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Wenn der Punct von 1 durch E, und der Winkel EON von $f(x) = T + iU$ durch φ bezeichnet wird, so ist $\tang \varphi = U : T$. Wenn φ steigend (fallend) die Werthe π, 2π, 3π, .. überschreitet, so geht $\tang \varphi$ steigend (fallend) durch 0 aus dem negativen ins positive Gebiet (aus dem positiven ins negative Gebiet). Also kann der Schenkel ON nicht Winkel beschreiben, deren Summe $2\pi k$ ist, ohne daß $U : T$ mehrmal null wird, und zwar $2k$mal öfter steigend als fallend. Man kann daher auch (nach Cauchy) zählen, wievielmal öfter steigend als fallend $U : T$ null wird, während der Punct der Variablen den Perimeter der Zelle durchläuft, um die Menge der in der Zelle enthaltenen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen.

IV. Gauß' Satz. Eine ganze Function $n$ten Grades $f(x)$ ist $n$mal null bei getrennten oder vereinten Werthen x der Variablen. Die Gleichung $n$ten Grades $f(x) = 0$ hat n Wurzeln, die im Allgemeinen alle, bei besondern Coefficienten nicht alle von einander verschieden sind.

Beweis. $f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + ..\right)$ ist bei hinreichend großem x durch $a_n x^n$, der Winkel von $f(x)$ durch den Winkel von $a_n x^n$ ausdrückbar mit einem beliebig kleinen Fehler, so daß die von ON beschriebenen Winkel $n$mal soviel betragen als die von OM beschriebenen. Wenn M einen hinreichend großen Kreis, dessen Centrum O ist, einmal durchläuft, so beschreibt ON den Winkel $2\pi n$. Also enthält die Fläche des von M durchlaufenen Kreises n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$.

Dieser Fundamentalsatz der algebraischen Analysis, welchen man früher aus besonderen Fällen erkannt hatte, ist von D'Alembert, Euler, Lagrange zu beweisen versucht worden. Mém. de Berlin 1746 p. 182, 1749 p. 223, 1772 p. 222. Den ersten Beweis nebst einer umfassenden Critik der frühern Versuche hat Gauß

*) Cauchy hat diesen Satz 1831 der Turiner Academie, 1837 in dem J. de l'Ecole polyt. Cah. 25 p. 176 mitgetheilt. Inzwischen hat Sturm 1836 denselben Satz einfacher bewiesen Liouv. J. 1 p. 290. Vergl. die Beweise von Sturm und Liouville Liouv. J. 1 p. 278, Moigno Liouv. J. 5 p. 75, Serret Algèbre supér. I p. 117. Zu weiterer Vereinfachung des Beweises haben Weierstraß' Vorlesungen beigetragen.

gegeben: Demonstratio nova theorematis, omnem functionem etc. Helmstädt 1799. Zwei andere Beweise hat Gauß 1815 und 1816 im 3ten Bande der Göttinger Commentationen, und eine neue Bearbeitung des zuerst erwähnten Beweises 1849 im 4ten Bande der Gött. Abhandlungen mitgetheilt (Werke Bd. 3). Nachdem Legendre (Théorie des nombres §. 119) die successive Minderung von $f(x)$ gezeigt hatte, gründete Cauchy 1821 seinen ersten Beweis auf die Voraussetzung, daß für den Modul von $f(x)$ ein Minimum existirt, indem er zeigte, daß dieses Minimum von Null nicht verschieden ist (Anal. algèbr. c. X. Vergl. Sturm a. a. O. und in Choquet et Mayer Algèbre §. 378), und seinen zweiten Beweis auf den von ihm aufgestellten Lehrsatz (III).

16. Wenn $f(t + iu) = T + iU$ ist, so enthält T nur gerade, U nur ungerade Potenzen von u, also sind T und $U : u$ ganze Functionen von t und u^2.

Die nicht realen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ gewinnt man aus denjenigen Auflösungen des Systems $T = 0$, $U : u = 0$ für die Unbekannten t, u^2, welche aus einem positiven Werth u^2 und dem entsprechenden (realen) Werth t bestehn. Man kann sich denselben durch eine der Newton'schen (§. 8, 5) analoge Methode annähern.

Ein Kreis, außerhalb dessen Puncte von Wurzeln einer gegebenen Gleichung nicht liegen, ist von Gauß 1849 angezeigt worden. Wenn

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots$$

wenn von x, A, B, .. die Moduln durch r, a, b, .. und die Winkel durch ϱ, α, β, .. bezeichnet werden, so ist

$$\frac{T}{U} = r^n \frac{\cos}{\sin} n\varrho + ar^{n-1} \frac{\cos}{\sin} \varrho_1 + br^{n-2} \frac{\cos}{\sin} \varrho_2 + \ldots$$

$$\varrho_1 = \alpha + (n-1)\varrho, \quad \varrho_2 = \beta + (n-2)\varrho, \ldots$$

Weil $\cos^2 n\varrho + \sin^2 n\varrho = 1$, so beträgt unter den Werthen $\cos n\varrho$, $-\cos n\varrho$, $\sin n\varrho$, $-\sin n\varrho$ einer nicht weniger als $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Wenn nun $\cos n\varrho \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so hat in T d. i.

$$\begin{matrix} r^n(\cos n\varrho - \sqrt{\tfrac{1}{2}}) & + ar^{n-1}(1 + \cos\varrho_1) & + br^{n-2}(1 + \cos\varrho_2) & + \ldots \\ + r^n\sqrt{\tfrac{1}{2}} & - ar^{n-1} & - br^{n-2} & - \ldots \end{matrix}$$

die erste Zeile lauter positive Glieder. Die zweite Zeile ist bei $r = 0$ negativ, bei $r = \infty$ positiv, folglich bei $r = R$ null; nicht bei mehrern r, weil es in der Zeile nur einen Wechsel giebt (13). Wenn also $r > R$, so ist T positiv, $T + iU$ nicht null. Ebenso findet man bei $r > R$ unter den Voraussetzungen

$$-\cos n\varrho \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad \sin n\varrho \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}} \qquad -\sin n\varrho \geqq \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$-T$, U, $-U$ positiv, folglich u. s. w.

17. Unter der Voraussetzung, daß y die $n$te Wurzel von x, und β eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 (Allg. Arithm. §. 18, 9) bedeutet, ist die ganze Function $f(y)$ eine $n$deutige irrationale Function von x,

deren conjugirte (demselben x entsprechende) Werthe durch $f(y\beta)$, $f(y\beta^2)$, .., $f(y\beta^n)$ ausgedrückt werden.

Wenn n eine Primzahl ist, so sind auch β^2, β^3, .. eigentliche $n$te Wurzeln von 1, und man findet aus den gegebenen Ausdrücken der irrationalen Function von x bei Vertauschung von β mit β^2, β^3, .. dieselben conjugirten Werthe in anderer Reihenfolge. Das Product der conjugirten Werthe enthält demnach β nicht und von y nur Potenzen, deren Exponenten durch n theilbar sind; es ist eine ganze Function von y^n d. i. von x, welche die Norm der irrationalen Function von x heißt und durch $Nf(y)$ bezeichnet wird (Allg. Arithm. §. 16, 7). In der That, wenn das Product durch $A_0 + A_1\beta + A_2\beta^2 + ..$ ausgedrückt wird, wobei A_0, A_1, .. von β nicht abhängen, so wird es auch durch $A_0 + A_1\beta^2 + A_2\beta^4 + ..$ ausgedrückt, u. s. w. Durch Addition aller dieser Ausdrücke ergiebt sich der Ausdruck des $n$fachen Products nA_0, in Betracht daß $\beta^k + (\beta^k)^2 + .. + (\beta^k)^n = 0$ (4). Und wenn das Product durch $B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + ..$ ausgedrückt wird, wobei B_0, B_1, .. ganze Functionen von y^n sind, so wird es auch durch $B_0 + B_1 y\beta + B_2 y^2\beta^2 + ..$ ausgedrückt, u. s. w., also auch durch B_0.

Wenn die Norm von $f(y)$ durch $\varphi(x)$ bezeichnet wird, so sind die Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ die $n$ten Potenzen der Wurzeln der Gleichung $f(y) = 0$. Am leichtesten findet man aus der Gleichung

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + .. = 0$$

die Gleichung

$$f_1(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + .. = 0$$

deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln von $f(x) = 0$ sind. Man bildet $f_1(x)$, indem man $f(x)$ mit $f(-x)$ oder mit $-f(-x)$ multiplicirt und x^2 durch x ersetzt, so daß $b_m = a_m{}^2$

$$b_{m-1} = - a_{m-1}{}^2 + 2a_m a_{m-2}$$
$$b_{m-2} = + a_{m-2}{}^2 - 2a_{m-1} a_{m-3} + 2a_m a_{m-4}$$
$$b_{m-3} = - a_{m-3}{}^2 + 2a_{m-2} a_{m-4} - 2a_{m-1} a_{m-5} + 2a_m a_{m-6}$$

u. s. w. Aus $f_1(x)$ findet man durch dasselbe Verfahren $f_2(x)$, so daß die Wurzeln von $f_2(x) = 0$ die Quadrate der Wurzeln von $f_1(x) = 0$, mithin die Biquadrate der Wurzeln von $f(x) = 0$ gleich sind. U. s. w.

Eine abgeleitete Gleichung, deren Wurzeln hinreichend hohe Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, dient zur Bestimmung der Moduln dieser Wurzeln, zuerst der größten, dann der nächstkleinern, u. s. w. nach einer vorzüglichen Methode, die von Gräffe (Auflösung der höhern numerischen Gleichungen, Zürich 1837) erfunden und von Encke (Astron. Jahrb. 1841 oder Crelle's J. 22 p. 193) weiter aus-

geführt worden ist. Vergl. Dan. Bernoulli de seriebus recurr. 1730, Comm. Petrop. t. 3. Klügel math. Wört. 4 p. 341 ff. Jacobi Crelle J. 13 p. 349.

18. I. Eine ganze Function der $n$ten Wurzel von x hat n Glieder, welche die 0te, 1te, .. $(n-1)$te Potenz der Wurzel enthalten. Bezeichnet man eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 durch β, und durch

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + \ldots + a_{n-1}\beta^{n-1}$$

einen Werth der Function, so sind die conjugirten Werthe $f(\beta)$, .., $f(\beta^n)$ die Wurzeln einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, weil sie bei der Vertauschung von β mit β^2, .. unverändert bleiben, mithin nur solche Potenzen der $n$ten Wurzel von x enthalten, deren Exponenten durch n theilbar sind. Man findet diese Gleichung für die Unbekannte u, indem man aus den Coefficienten der Ausdrücke $f(\beta) - u$, $\beta f(\beta) - \beta u$, $\beta^2 f(\beta) - \beta^2 u$, .. d. i.

$$\begin{array}{lllll} a_0 - u + & a_1\beta & + \quad a_2\beta^2 & + \ldots + & a_{n-1}\beta^{n-1} \\ a_{n-1} & + (a_0 - u)\beta + & a_1\beta^2 & + \ldots + & a_{n-2}\beta^{n-1} \\ a_{n-2} & + \quad a_{n-1}\beta & + (a_0 - u)\beta^2 & + \ldots + & a_{n-3}\beta^{n-1} \end{array}$$

u. s. w. die Determinante $n$ten Grades bildet (Allg. Arithm. §. 26)

$$\chi(u) = \begin{vmatrix} a_0 - u & a_1 & a_2 & . \\ a_{n-1} & a_0 - u & a_1 & . \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 - u & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}$$

Wenn man zu den Elementen der ersten Colonne die mit β, β^2, .. multiplicirten Elemente der 2ten, 3ten, .. Colonne addirt, so bleibt die Determinante des Systems unverändert. Alle Elemente der transformirten ersten Colonne verschwinden, wenn u einen der conjugirten Werthe $f(\beta)$, $f(\beta^2)$, .. erhält. Also hat die Gleichung $\chi(u) = 0$ die Wurzeln $f(\beta)$, $f(\beta^2)$, .., $f(\beta^n)$. In der That enthält die Determinante $\chi(u)$ nur solche Glieder, bei denen die Summe der Indices durch n theilbar ist.

In $\chi(u)$ hat u^n den Coefficienten $(-1)^n$, und wenn man $\chi(0)$ durch diesen Coefficienten dividirt, so erhält man das mit $(-1)^n$ multiplicirte Product der Wurzeln von $\chi(u) = 0$ (4). Also ist $\chi(0)$ die Norm der irrationalen Formel $f(\beta)$.

Beispiele. Wenn $\beta^3 = 1$, so hat $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2$ die Norm

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{\,3} - 3a_0 a_1 a_2 + a_2^{\,3} + a_1^{\,3}$$

Wenn $\beta^4 = 1$, so hat $a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3$ die Norm

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{aligned} a_0^{\,4} &- 4a_0^{\,2}a_1a_3 + 4a_0a_2a_3^{\,2} - a_3^{\,4} \\ &- 2a_0^{\,2}a_2^{\,2} + 2a_1^{\,2}a_3^{\,2} \\ &+ 4a_0a_1^{\,2}a_2 - 4a_1a_2^{\,2}a_3 \\ &- a_1^{\,4} \qquad + a_2^{\,4} \end{aligned}$$

Die Norm von $a + b\sqrt[12]{x} + c\sqrt[9]{x} + d\sqrt[8]{x}$ ist durch die Norm von $a + b\sqrt[72]{x^6} + c\sqrt[72]{x^8} + d\sqrt[72]{x^9}$ theilbar. Vergl. Meier Hirsch Aufg. aus der Theorie der algebraischen Gleichungen 1809 §. 96 ff.

II. Wenn u eine Function mehrerer Wurzeln ist, so bilde man zuerst die Norm derselben in Bezug auf eine der Wurzeln, welche eine Function der übrigen Wurzeln ist, u. s. w. Die Norm von u ist das Product aller conjugirten Werthe von u.

Die Formel $\sqrt[\lambda]{p} + \sqrt[\mu]{q} + \sqrt[\nu]{r}$ hat $\lambda\mu\nu$ conjugirte Werthe, deren Product eine ganze Function p, q, r ist.

Die Formel $\sqrt[n]{p} + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \ldots$ hat $nnn \ldots$ conjugirte Werthe, deren Product die $n$te Potenz einer ganzen Function von $p, q, r \ldots$, der Norm der gegebenen Formel ist. Wenn man einen Werth von $\sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \ldots$ durch y_k und eine eigentliche $n$te Wurzel von 1 durch β bezeichnet, so sind $y_k\beta, y_k\beta^2, \ldots, y_k\beta^{n-1}$ andre Werthe derselben Formel. Bezeichnet man einen Werth der $n$ten Wurzel von p durch x, so ist die Norm von $x + \sqrt[n]{q} + \sqrt[n]{r} + \ldots$ das Product

$$\begin{matrix} (x + y_1\beta)\,(x + y_1\beta^2)\,(x + y_1\beta^3) \ldots \\ (x + y_2\beta)\,(x + y_2\beta^2)\,(x + y_2\beta^3) \ldots \\ (x + y_3\beta)\,(x + y_3\beta^2)\,(x + y_3\beta^3) \ldots \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{matrix}$$

eine ganze Function nicht nur von $q, r, \ldots$, sondern auch von x^n d. von p, weil nach (4)

$$(x + y_k\beta)(x + y_k\beta^2) \ldots (x + y_k\beta^n) = x^n - (-y_k)^n$$

Diese Normen sind von Möbius Crelle's J. 3 p. 17 und Förstmann Crelle's J. 8 p. 317, 14 p. 236 näher betrachtet worden.

Die Aufgabe, aus einer Gleichung, in der irrationale Functionen der Unbekannten vorkommen, eine Gleichung von demselben Umfang mit rationalen Gliedern abzuleiten, ist von Fermat den Mathematikern seiner Zeit vorgelegt worden (Cartesii epist. Tom. 3 p. 304). Descartes hat a. a. O. einen Auflösungsversuch von zweifelhaftem Werth angedeutet. Durch Reduction des Problems auf die Auflösung eines Systems von nicht linearen Gleichungen hat Fermat (Opp. p. 60) die Lösbarkeit der Aufgabe angezeigt, ebenso Newton (Arithm. univ. p. 64 ed. Lugd.). Daß das Product aller conjugirten Werthe einer irrationalen Formel rational ist, wurde zuerst von Euler (Mém. de Berl. 1748 p. 234, sowie in einer spätern Abhandlung 1764 Nov. Comm. Petrop. 9 p. 70) bewiesen. Durch die von Euler angewandten Mittel hat Lambert 1770 (Beiträge II^a p. 202) die Aufgabe gelöst: aus einer gegebenen Gleichung diejenige Gleichung abzuleiten, deren Wurzeln die $n$ten Potenzen der Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Vergl. Meier Hirsch a. a. O. Schönemann Crelle's J. 19 p. 234.

19. I. Wenn $g(x) = b_0 + b_1 x + .. + b_n x^n$ ist und die Gleichung $g(x) = 0$ die Wurzeln $\beta_1, \beta_2, .., \beta_n$ hat, deren eine durch β bezeichnet wird, so ist die $n$deutige algebraische Function

$$f(\beta) = a_0 + a_1\beta + .. + a_m\beta^m$$

eine Wurzel einer bestimmten Gleichung $n$ten Grades, deren Coefficienten ganze Functionen der Coefficienten a und b sind *). Um diese Gleichung für die Unbekannte u aufzustellen, bilde man aus den Coefficienten der n Functionen von β

$$f(\beta) - u,\quad \beta f(\beta) - \beta u,\quad ..,\quad \beta^{n-1}f(\beta) - \beta^{n-1}u, \text{ d. i.}$$

$$\begin{array}{llll} a_0 - u + a_1\beta & + .. & & \\ * & (a_0 - u)\beta + a_1\beta^2 & + .. & \\ * & * & (a_0 - u)\beta^2 + a_1\beta^3 & + .. \end{array}$$

u. s. w., und aus den Coefficienten der m Functionen

$$g(\beta),\quad \beta g(\beta),\quad ..,\quad \beta^{m-1}g(\beta), \text{ d. i.}$$

$$\begin{array}{llll} b_0 + b_1\beta + .. & & & \\ * & b_0\beta + b_1\beta^2 + .. & & \\ * & * & b_0\beta^2 + b_1\beta^3 + .. & \end{array}$$

u. s. w., die Determinante $(n + m)$ten Grades

$$\varphi(u) = \begin{vmatrix} a_0 - u & a_1 & a_2 & . & . & & \\ * & a_0 - u & a_1 & a_2 & . & . & \\ * & * & a_0 - u & a_1 & a_2 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . & . \\ * & b_0 & b_1 & b_2 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}$$

Wenn man zu den Elementen der ersten Colonne die mit $\beta, \beta^2, ..$ multiplicirten Elemente der 2ten, 3ten, .. Colonne addirt, so bleibt die

*) Vergl. des Verf. Determinanten §. 11.

Determinante des Systems unverändert. Alle Elemente der transformirten ersten Colonne verschwinden unter den gemachten Voraussetzungen, wenn u einen der conjugirten Werthe $f(\beta_1)$, $f(\beta_2)$, .., $f(\beta_n)$ erhält. Demnach sind $f(\beta_1)$, .., $f(\beta_n)$ die Wurzeln der Gleichung $\varphi(u) = 0$.

II. In $\varphi(u)$ hat u^n den Coefficienten $(-1)^n b_n^m$, und wenn man $\varphi(0)$ durch diesen Coefficienten dividirt, so findet man das mit $(-1)^n$ multiplicirte Product der Wurzeln von $\varphi(u) = 0$ (4). Also ist

$$b_n^m f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n) = \varphi(0).$$

Setzt man $f(x) = a_m(x - \alpha_1) \,..\, (x - \alpha_m)$, so findet man

$$f(\beta_1) = a_m(\beta_1 - \alpha_1) \,..\, (\beta_1 - \alpha_m)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f(\beta_n) = a_m(\beta_n - \alpha_1) \,..\, (\beta_n - \alpha_m)$$

Nun ist $b_n(\beta_1 - x) \,..\, (\beta_n - x) = (-1)^n g(x)$, folglich

$$\varphi(0) = b_n^m f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n) = (-1)^{mn} a_m^n g(\alpha_1) \,..\, g(\alpha_m)$$
$$= a_m^n b_n^m D(\alpha_1, .., \alpha_m \mid \beta_1, .., \beta_n)$$

indem man durch $D(..|..)$ das Product der mn Differenzen bezeichnet, welche durch Subtraction aller α von allen β entstehn.

III. Das Product der conjugirten Werthe $f(\beta_1) \,..\, f(\beta_n)$ mit b_n^m, oder der conjugirten Werthe $g(\alpha_1) \,..\, g(\alpha_m)$ mit $(-1)^{mn} a_m^n$, oder aller Differenzen $\beta - \alpha$ mit $a_m^n\ {}_n^m$ ist $\varphi(0)$, eine homogene ganze Function der Coefficienten a von n Dimensionen und der Coefficienten b von m Dimensionen, und heißt die Resultante der Functionen $f(x)$ und $g(x)$ in Bezug auf die Variable x*).

Wenn z. B. die Coefficienten a_m, a_{m-1}, a_{m-2}, .. und b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, .. homogene ganze Functionen der Variablen y, z von 0, 1, 2, .. Dimensionen sind, wenn demnach $f(x)$ und $g(x)$ homogene ganze Functionen der Variablen x, y, z sind, jene von m Dimensionen, diese von n Dimensionen, so ist ihre Resultante $\varphi(0)$ eine homogene ganze Function der Variablen y, z von mn Dimensionen. Denn bei der Vertauschung von y und z mit yt und zt gehen

$$a_m,\ a_{m-1},\ a_{m-2},\ ..,\ b_n,\ b_{n.1},\ b_{n-2},\ ..$$

der Reihe nach über in

$$a_m,\ a_{m-1}t,\ a_{m-2}t^2,\ ..,\ b_n,\ b_{n-1}t,\ b_{n-2}t^2,\ ..$$

---

*) Euler Mém. de Berlin 1748 p. 234. Vergl. Salmon higher plan curves p. 295.

(§. 2, 10). Dabei gehen $\alpha_1, \alpha_2, .., \beta_1, \beta_2, ..$ der Reihe nach über in

$$\alpha_1 t, \quad \alpha_2 t, \quad .., \quad \beta_1 t, \beta_2 t, \quad ..$$

(4, vergl. §. 7, 1); folglich erhält das Product aller mn Differenzen $\beta - \alpha$ den Multiplicator t^{mn}, d. h. $\varphi(0)$ geht in $t^{mn}\varphi(0)$ über, die Gleichung $\varphi(0) = 0$ ist für die Unbekannte $y : z$ vom mnten Grad.

Wenn die Resultante $\varphi(0)$ verschwindet, so verschwindet wenigstens eine unter den Differenzen $\beta - \alpha$, und die bei demselben Werth von x verschwindenden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ haben einen gemeinschaftlichen Divisor $h(x)$, dessen Coefficienten zufolge des Systems $f(x) = 0$, $xf(x) = 0, .., g(x) = 0, xg(x) = 0, ..$ ganze Functionen der Coefficienten a und b sind. Nachdem man alle Werthe von y berechnet hat, bei welchen $\varphi(0)$ null ist, findet man aus der Gleichung $h(x) = 0$ die entsprechenden Werthe von x, welche zusammen dem System $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ genügen. Vergl. §. 6, 9.

Leipzig,

Druck von Hundertstund & Pries.